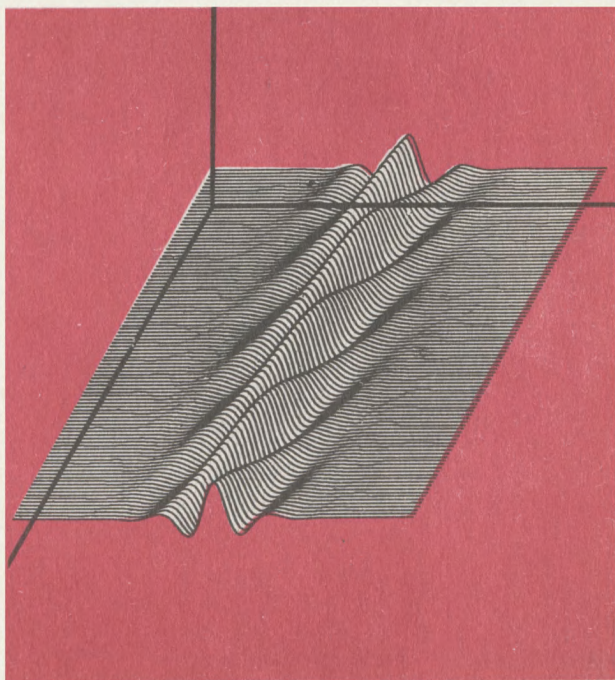




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 48

А.Т. ФИЛИППОВ

МНОГОЛИКИЙ СОЛИТОН

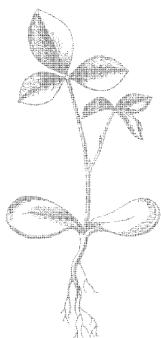




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 48

А.Т. ФИЛИПPOB

МНОГОЛИКИЙ СОЛИТОН



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.31
Ф 53
УДК 530.1(023)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Академик **Ю. А. Осипьян** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), профессор **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, профессор **С. П. Капица**, академик **С. П. Новиков**, академик АПН СССР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**

Рецензент

кандидат физико-математических наук **С. Р. Филонович**

Филиппов А. Т.

Ф53 Многоликий солитон. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 224 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 48.)

40 к. 82 000

Колебания и волны изучаются почти во всех областях науки. Одно из наиболее удивительных и красивых волновых явлений — образование уединенных волн, или солитонов, распространяющихся в виде импульсов неизменной формы и во многом подобных частицам. В книге популярно и доступно излагается история открытия и изучения солитонов и основные идеи увлекательной науки о солитонах, описаны солитонные явления в различных системах: в океанах (цунами), в твердых телах (дислокации и доменные стенки), в живых организмах (нервный импульс) и т. д.

Для школьников старших классов, студентов, преподавателей.

Ф 1704020000 — 007 193-85
053(02)-86

ББК 22.31

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1986

Многим, вероятно, встречалось слово «солитон», созвучное таким словам, как электрон или протон. Научной идее, скрывающейся за этим легко запоминающимся словом, ее истории и творцам и посвящена эта книга.

Рассчитана она на самый широкий круг читателей, усвоивших школьный курс физики и математики и интересующихся наукой, ее историей и приложениями. Рассказано в ней о солитонах далеко не все. Зато большую часть того, что осталось после всех ограничений, я старался изложить достаточно подробно. При этом некоторые хорошо известные вещи (например, о колебаниях и волнах) пришлось представить несколько иначе, чем это сделано в других научно-популярных и вполне научных книгах и статьях, которыми я, конечно, широко пользовался. Перечислить их авторов и упомянуть всех ученых, беседы с которыми повлияли на содержание этой книги, совершенно невозможно, и я приношу им свои извинения вместе с глубокой благодарностью.

Особо я хотел бы поблагодарить С. П. Новикова за конструктивную критику и поддержку, Л. Г. Асламазова и Я. А. Смородинского за ценные советы, а также Ю. С. Гальперн и С. Р. Филоновича, которые внимательно прочли рукопись и сделали много замечаний, способствовавших ее улучшению.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Колебания и волны являются основным, по представлению физика-теоретика, средством познания реального мира. Колебаться может все — любые предметы, жидкости и газы; свет, звук, нервные импульсы в конечном счете являются видами колебаний.

Физики и математики делят колебания на *линейные* и *нелинейные*. Теория линейных колебаний создана в XVIII—XIX веках Бернулли, Д'Аламбером, Фурье, Максвеллом, Гельмгольцем и др. Она лежит в основе аппарата современной математической физики, на ней построена квантовая механика. Нелинейные явления встречались и раньше. Еще в XIX веке стало понятным, что явления в гидродинамике и небесной механике нелинейны. Однако систематическая теория нелинейных колебаний и волн — *теория солитонов* — появилась лишь во второй половине XX века.

Только в последнее десятилетие осознана общезначимость солитонов, сделан ряд физических и математических открытий.

Как рассказать об этом без сложного математического аппарата, понятно для старшеклассников, увлекающихся физикой и математикой? Можно ли это сделать?

Данная книга и является такой попыткой — вероятно, первой. Мне кажется, что это удалось автору. Впрочем, предоставим возможность судить об этом юному читателю.

Академик С. П. Новиков

Нигде единство природы и универсальность ее законов не проявляются так ярко, как в колебательных и волновых явлениях. Каждый школьник без труда ответит на вопрос: «Что общего между качелями, часами, сердцем, электрическим звонком, люстрой, телевизором, саксофоном и океанским лайнером?» — и легко продолжит этот список. Общее, конечно, то, что во всех этих системах существуют или могут возбуждаться *колебания*.

Некоторые из них мы видим невооруженным глазом, другие наблюдаем с помощью приборов. Одни колебания очень простые, как, например, колебания качелей, другие намного сложнее — достаточно посмотреть на электрокардиограммы или энцефалограммы, но мы всегда легко отличим колебательный процесс по характерной повторяемости, периодичности.

Мы знаем, что колебание — это периодическое движение или изменение состояния, причем неважно, что движется или изменяет состояние. Наука о колебаниях изучает то общее, что есть в колебаниях самой разной природы.

Точно так же можно сравнивать и *волны* совершенно разной природы — рябь на поверхности лужи, радиоволны, «зеленую волну» светофоров на автомобильной трассе — и многие, многие другие. Наука о волнах изучает волны сами по себе, отвлекаясь от их физической природы. Волна рассматривается как процесс передачи возбуждения (в частности, колебательного движения) от одной точки среды к другой. При этом природа среды и конкретный характер ее возбуждений несущественны. Поэтому естественно, что колебательные и звуковые волны и связи между ними изучает сегодня единая наука — *теория колебаний и волн*. Общий характер этих связей хорошо известен. Часы «тикают», звонок звенит, качели качаются и скрипят, излучая звуковые волны; по кровеносным сосудам распространяется волна, которую мы наблюдаем, измеряя пульс; электромагнитные колебания, воз-

бужденные в колебательном контуре, усиливаются и уносятся в пространство в виде радиоволн; «колебания» электронов в атомах рожают свет и т. д.

При распространении простой периодической волны малой амплитуды частицы среды совершают периодические движения. При небольшом увеличении амплитуды волны амплитуда этих движений также пропорционально увеличивается. Если, однако, амплитуда волны становится достаточно большой, то могут возникнуть новые явления. Например, волны на воде при большой высоте становятся крутыми, на них образуются буруны, и они в конце концов опрокидываются. При этом характер движения частиц воды полностью меняется. Частицы воды в гребне волны начинают двигаться совершенно беспорядочно, т. е. регулярное, колебательное движение переходит в нерегулярное, хаотическое. Это — самая крайняя степень проявления *нелинейности* волн на воде. Более слабое проявление нелинейности — зависимость формы волны от ее амплитуды.

Чтобы объяснить, что такое нелинейность, нужно сначала объяснить, что такое *линейность*. Если волны имеют очень малую высоту (амплитуду), то при увеличении их амплитуды, скажем, в два раза они остаются точно такими же, их форма и скорость распространения не изменяются. Если одна такая волна набегит на другую, то возникающее в результате более сложное движение можно описать, просто складывая высоты обеих волн в каждой точке. На этом простом свойстве линейных волн основано хорошо известное объяснение явления интерференции волн.

Волны с достаточно малой амплитудой всегда линейны. Однако с увеличением амплитуды их форма и скорость начинают зависеть от амплитуды, и их уже нельзя просто складывать, волны становятся нелинейными. При большой амплитуде нелинейность порождает буруны и приводит к опрокидыванию волн.

Форма волн может искажаться не только из-за нелинейности. Хорошо известно, что волны разной длины распространяются, вообще говоря, с различной скоростью. Это явление называется *дисперсией*. Наблюдая волны, разбегающиеся кругами от брошенного в воду камня, легко увидеть, что длинные волны на воде бегут быстрее коротких. Если на поверхности воды в длинной и узкой канавке образовалось небольшое возвышение (его легко сделать с помощью перегородок, которые можно быстро убрать), то оно, благодаря дисперсии, быстро распадется на отдельные волны разной длины, рассеется и исчезнет.

Замечательно, что некоторые из таких водяных холмиков не исчезают, а живут достаточно долго, сохраняя свою форму. Увидеть рождение таких необычных «*уединенных*» волн вовсе не просто, но тем не менее 150 лет назад они были обнаружены и изучены в опытах, идея которых была только что описана. Природа этого удивительного явления долгое время оставалась загадочной. Казалось, что оно противоречит хорошо установленным наукой законам образования и распространения волн. Лишь спустя многие десятилетия после публикации сообщения об опытах с уединенными волнами их загадка была частично решена. Оказалось, что они могут образовываться, когда «уравновешиваются» эффекты нелинейности, делающие холмик более крутым и стремящиеся опрокинуть его, и эффекты дисперсии, делающие его более пологим и стремящиеся размыть его. Между Сциллой нелинейности и Харибдой дисперсии и рождаются уединенные волны, совсем недавно получившие название *солитонов*.

Уже в наше время были открыты и наиболее удивительные свойства солитонов, благодаря которым они стали предметом увлекательных научных поисков. О них будет подробно рассказано в этой книге. Одно из замечательных свойств уединенной волны — это то, что она похожа на частицу. Две уединенные волны могут сталкиваться и разлетаться, подобно бильярдным шарам, и в некоторых случаях можно представлять себе солитон просто как частицу, движение которой подчиняется законам Ньютона. Самое же замечательное в солитоне — это его многоликость. За последние 50 лет были открыты и изучены многие уединенные волны, подобные солитонам на поверхности волн, но существующие совсем в иных условиях. Их общая природа выяснилась относительно недавно, в последние 20—25 лет.

Сейчас изучают солитоны в кристаллах, магнитных материалах, сверхпроводниках, в живых организмах, в атмосфере Земли и других планет, в галактиках. По-видимому, солитоны играли важную роль в процессе эволюции Вселенной. Многие физики сейчас увлечены идеей, что элементарные частицы (например протон) тоже можно рассматривать как солитоны. Современные теории элементарных частиц предсказывают различные, пока не наблюдавшиеся солитоны, например, солитоны, несущие магнитный заряд!

Уже начинается применение солитонов для хранения и передачи информации. Развитие этих идей в будущем может привести к революционным изменениям, например, в технике связи. В общем, если вы еще не слышали о солитонах, то очень скоро услышите. Эта книга — одна из первых

попыток доступно рассказать о солитонах. Разумеется, рассказать о всех известных сегодня солитонах невозможно, не стоит и пытаться. Да в этом и нет необходимости.

Действительно, чтобы понять, что такое колебания, вовсе не надо знакомиться со всем многообразием колебательных явлений, встречающихся в природе и технике. Достаточно понять основные идеи науки о колебаниях на простейших примерах. Например, все малые колебания похожи друг на друга, и нам достаточно понять, как колеблется грузик на пружинке или маятник в настенных часах. Простота малых колебаний связана с их линейностью — сила, возвращающая грузик или маятник к положению равновесия, пропорциональна отклонению от этого положения. Важное следствие линейности — независимость частоты колебаний от их амплитуды (размаха).

Если условие линейности нарушено, то колебания гораздо более разнообразны. Тем не менее можно выделить некоторые типы нелинейных колебаний, изучив которые, можно понять работу самых разных систем — часов, сердца, саксофона, генератора электромагнитных колебаний...

Самый важный пример нелинейных колебаний дают нам движения все того же маятника, если не ограничиваться малыми амплитудами и устроить маятник так, чтобы он мог не только качаться, но и вращаться. Замечательно, что хорошо разобравшись с маятником, можно понять и устройство солитона! Именно на этом пути мы с вами, читатель, и попробуем понять, что такое солитон.

Хотя это и самая простая дорога в страну, где живут солитоны, на ней нас подстерегают многие трудности, и тот, кто хочет по-настоящему понять солитон, должен запастись терпением. Сначала надо изучить линейные колебания маятника, затем уяснить связь между этими колебаниями и линейными волнами, в особенности понять природу дисперсии линейных волн. Это не так уж сложно. Связь между нелинейными колебаниями и нелинейными волнами гораздо сложнее и тоньше. Но все-таки мы и ее попробуем описать без сложной математики. Достаточно полно нам удастся представить лишь один тип солитонов, с остальными же придется разбираться по аналогии.

Пусть читатель воспринимает эту книгу как путешествие в незнакомые края, в котором он подробно познакомится с одним каким-нибудь городом, а по остальным местам прогуляется, присматриваясь ко всему новому и стараясь связать его с тем, что уже удалось понять. С одним городом все же надо познакомиться достаточно хорошо, иначе есть риск упустить

самое интересное из-за незнания языка, нравов и обычаев чужих краев.

Итак, в дорогу, читатель! Пусть это «собрание пестрых глав» будет путеводителем по еще более пестрой и разнообразной стране, где живут колебания, волны и солитоны. Чтобы облегчить пользование этим путеводителем, сначала надо сказать несколько слов о том, что в нем содержится, чего в нем нет.

Отправляясь в незнакомую страну, естественно сначала познакомиться с ее географией и историей. В нашем случае это почти одно и то же, так как изучение данной страны по сути дела только начинается, и нам неизвестны даже ее точные границы.

В первой части книги излагается история уединенной волны вместе с основными представлениями о ней. Затем рассказано о вещах, на первый взгляд довольно непохожих на уединенную волну на поверхности воды — о вихрях и нервном импульсе. Их исследование тоже началось в прошлом веке, но родство с солитонами было установлено совсем недавно. Читатель сможет по-настоящему понять эту связь, если у него хватит терпения добраться до последней главы. В компенсацию затраченных усилий он сможет увидеть глубокое внутреннее родство столь несходных явлений, как цунами, лесные пожары, антициклоны, солнечные пятна, упрочнение металлов при ковке, намагничивание железа и т. д.

Но сначала нам придется на некоторое время погрузиться в прошлое, в первую половину XIX в., когда возникли идеи, которые в полной мере были освоены лишь в наше время. В этом прошлом нас в первую очередь будет интересовать история учения о колебаниях, волнах и то, как на этом фоне возникли, развивались и воспринимались идеи, составившие впоследствии фундамент науки о солитонах. Нас будут интересовать судьбы именно идей, а не судьбы их создателей. Как сказал Альберт Эйнштейн, история физики — это драма, драма идей. В этой драме «...поучительно следить за изменчивыми судьбами научных теорий. Они более интересны, чем изменчивые судьбы людей, ибо каждая из них включает что-то бессмертное, хотя бы частицу вечной истины» *).

*) Эти слова принадлежат польскому физiku Мариану Смолуховскому, одному из создателей теории броуновского движения. За развитием некоторых основных физических идей (таких, как волна, частица, поле, относительность) читатель может проследить по замечательной популярной книге А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики» (М.: ГТТИ, 1956).

Тем не менее было бы неправильно не упомянуть о создателях этих идей, и в этой книге уделено достаточно много внимания людям, впервые высказавшим те или иные ценные мысли, независимо от того, стали они знаменитыми учеными или нет. Автор особо старался извлечь из забвения имена людей, недостаточно оцененных своими современниками и потомками, а также напомнить о некоторых малоизвестных работах достаточно знаменитых ученых. (Здесь для примера рассказано о жизни нескольких ученых, мало известных широкому кругу читателей и высказавших идеи, в той или иной мере имеющие отношение к солитону; о других приведены лишь краткие данные.)

Эта книга — не учебник, тем более не учебник по истории науки. Возможно, не все приводимые в ней исторические сведения изложены абсолютно точно и объективно. История теории колебаний и волн, в особенности нелинейных, изучена недостаточно. История же солитонов пока вообще не написана. Может быть, кусочки мозаики этой истории, собранные автором в разных местах, пригодятся кому-нибудь для более серьезного исследования. Мы же во второй части книги в основном сосредоточимся на физике и математике нелинейных колебаний и волн в том виде и объеме, в котором это необходимо для достаточно глубокого знакомства с солитоном.

Во второй части сравнительно много математики. Предполагается, что читатель достаточно хорошо понимает, что такое производная и как с помощью производной выражаются скорость и ускорение. Необходимо также вспомнить некоторые формулы тригонометрии.

Совсем без математики обойтись нельзя, но на самом деле нам понадобится немногим больше того, чем владел Ньютон. Двести лет назад французский философ, педагог и один из реформаторов школьного преподавания Жан Антуан Кондорсе сказал: «В настоящее время молодой человек по окончании школы знает из математики более того, что Ньютон приобрел путем глубокого изучения или открыл своим гением; он умеет владеть орудиями вычисления с легкостью, тогда недоступной». Мы добавим к тому, что Кондорсе предполагал известным школьникам немного из достижений Эйлера, семьи Бернулли, Д'Аламбера, Лагранжа и Коши. Для понимания современных физических представлений о солитоне этого вполне достаточно. О современной математической теории солитонов не рассказывается — она весьма сложна.

Мы все же напомним в этой книге обо всем, что нужно из математики, и, кроме того, читатель, которому не хочется

или некогда разбираться в формулах, может просто бегло их просмотреть, следя лишь за физическими идеями. Вещи, более трудные или уводящие читателя в сторону от основной дороги, выделены мелким шрифтом.

Вторая часть в какой-то мере дает представление об учении о колебаниях и волнах, но о многих важных и интересных идеях в ней не говорится. Наоборот, то, что нужно для изучения солитонов, рассказано подробно. Читатель, который хрчет познакомиться с общей теорией колебаний и волн, должен заглянуть в другие книги. Солитоны связаны со столь разными науками, что автору пришлось во многих случаях рекомендовать другие книги для более подробного знакомства с некоторыми явлениями и идеями, о которых здесь сказано слишком кратко. В особенности стоит заглядывать в другие выпуски Библиотечки «Квант», которые часто цитируются.

В третьей части подробно и последовательно рассказано об одном типе солитонов, который вошел в науку 50 лет назад независимо от уединенной волны на воде и связан с дислокациями в кристаллах. В последней главе показано, как в конце концов судьбы всех солитонов скрестились и родилось общее представление о солитонах и солитоноподобных объектах. Особую роль в рождении этих общих идей сыграли ЭВМ. Вычисления на ЭВМ, которые привели ко второму рождению солитона, были первым примером численного эксперимента, когда ЭВМ использовались не просто для вычислений, а для обнаружения новых, неизвестных науке явлений. У численных экспериментов на ЭВМ несомненно большое будущее, и о них рассказано достаточно подробно.

После этого мы переходим к рассказу о некоторых современных представлениях о солитонах. Здесь изложение постепенно становится все более кратким, и последние три параграфа седьмой главы (в особенности самый последний) дают лишь общее представление о том, в каких направлениях развивается наука о солитонах. Задача этой совсем короткой экскурсии — дать понятие о науке сегодняшнего дня и немного заглянуть в будущее.

Если читатель сумеет уловить в представленной ему пестрой картине внутреннюю логику и единство, то основная цель, которую ставил перед собой автор, будет достигнута. Конкретная задача этой книги — рассказать о солитоне и его истории. Судьба этой научной идеи во многом кажется необычной, но при более глубоком размышлении выясняется, что многие научные идеи, которые сегодня составляют наше общее богатство, рождались, развивались и воспринимались с меньшими трудностями.

Отсюда возникла более широкая задача этой книги — на примере солитона попытаться показать, как устроена наука вообще, как она в итоге после многих недоразумений, заблуждений и ошибок добирается до истины. Главная цель науки — добывать истинное и полное знание о мире, и она может принести пользу людям лишь в той мере, в какой приближается к этой цели. Самое трудное здесь — полнота. Истинность научной теории мы в конце концов устанавливаем с помощью экспериментов. Однако никто не может подсказать нам, как придумать новую научную идею, новое понятие, с помощью которого в сферу стройного научного знания входят целые миры явлений, прежде разобщенных, а то и вовсе ускользавших от нашего внимания. Можно себе представить мир без солитонов, но это уже будет другой, более бедный мир. Идея солитона, как и другие большие научные идеи, ценна не только тем, что она приносит пользу. Она еще больше обогащает наше восприятие мира, раскрывая его внутреннюю, ускользающую от поверхностного взгляда красоту.

Автору особенно хотелось приоткрыть читателю эту сторону работы ученого, роднящую ее с творчеством поэта или композитора, открывающих нам стройность и красоту мира в сферах, более доступных нашим чувствам. Работа ученого требует не только знаний, но и воображения, наблюдательности, смелости и самоотверженности. Может быть, эта книга поможет кому-то решиться пойти вслед за бескорыстными рыцарями науки, об идеях которых в ней рассказано, или хотя бы задуматься и попытаться понять, что заставляло неустанно работать их мысль, никогда не удовлетворенную достигнутым. Автор хотел бы надеяться на это, но, к сожалению, «нам не дано предугадать, как слово наше отзовется...» Что получилось из намерения автора — судить читателю.

ИСТОРИЯ СОЛИТОНА

Наука! ты — дитя Седых Времени!
Меня все вниманьем глаз прозрачных,
Зачем тревожишь ты поэта сон...

Эдгар По

Первая официально зарегистрированная встреча человека с солитоном произошла 150 лет назад, в августе 1834 г., вблизи Эдинбурга. Встреча эта была на первый взгляд случайной. Человек не готовился к ней специально, и от него требовались особые качества, чтобы он смог увидеть необычное в явлении, с которым сталкивались и другие, но не замечали в нем ничего удивительного. Джон Скотт Рассел (1808—1882) был сполна наделен именно такими качествами. Он не только оставил нам научно точное и яркое, не лишенное поэтичности описание своей встречи с солитоном*), но и посвятил многие годы жизни исследованию этого поразившего его воображение явления.

Современники Рассела не разделяли его энтузиазма, и уединенная волна не стала популярной. С 1845 по 1965 гг. было опубликовано не более двух десятков научных работ, непосредственно связанных с солитонами. За это время, правда, были открыты и частично изучены близкие родственники солитона, однако универсальность солитонных явлений не была понята, а об открытии Рассела почти не вспоминали.

В последние двадцать лет началась новая жизнь солитона, который оказался поистине многоликим и вездесущим. Ежегодно публикуются тысячи научных работ о солитонах в физике, математике, гидромеханике, астрофизике, метеорологии, океанографии, биологии. Собираются научные конференции, специально посвященные солитонам, о них пишутся книги, все большее число ученых включается в увлекательную охоту за солитонами. Короче, уединенная волна вышла из уединения в большую жизнь.

Как и почему произошел этот удивительный поворот в судьбе солитона, который не мог предвидеть даже влюбленный в соли-

*) Он назвал его волной трансляции (переноса) или *большой уединенной волной* (great solitary wave). От слова solitary и был позже произведен термин «солитон».

тон Рассел, читатель узнает, если у него хватит терпения дочитать эту книгу до конца. А пока попытаемся мысленно перенестись в 1834 г., чтобы представить себе научную атмосферу той эпохи. Это поможет нам лучше понять отношение современников Рассела к его идеям и дальнейшую судьбу солитона. Наша экскурсия в прошлое будет, по необходимости, очень беглой, мы познакомимся, главным образом, с теми событиями и идеями, которые прямо или косвенно оказались связанными с солитоном.

Глава 1

150 ЛЕТ НАЗАД

Век девятнадцатый, железный,
Воистину жестокий век...

А. Блок

Бедный век наш — сколько на него нападок, каким чудовищем считают его! И все за железные дороги, за пароходы — эти великие победы его, уже не над материею только, но над пространством и временем.

В. Г. Белинский

Итак, первая половина прошлого века, время не только наполеоновских войн, социальных сдвигов и революций, но и научных открытий, значение которых раскрывалось постепенно, спустя десятилетия. В то время об этих открытиях знали немногие, и лишь единицы могли предвидеть их великую роль в будущем человечества. Мы теперь знаем о судьбе этих открытий и не сумеем в полной мере оценить трудности их восприятия современниками. Но давайте все же попробуем напрячь воображение и память и попытаемся пробыть через пласты времени.

1834 год ... Еще нет телефона, радио, телевидения, автомобилей, самолетов, ракет, спутников, ЭВМ, ядерной энергетики и многого другого. Всего пять лет назад построена первая железная дорога, и только что начали строить пароходы. Основной вид энергии, используемой людьми, — энергия нагретого пара.

Однако уже зреют идеи, которые в конце концов приведут к созданию технических чудес XX в. На все это уйдет еще почти сто лет. Между тем наука пока сосредоточена в университетах. Еще не пришло время узкой специализации, и физика еще не выделилась в отдельную науку. В университетах читают курсы «натурфилософии» (т. е. естествознания), первый физический институт будет создан только в 1850 г.

В то далекое время фундаментальные открытия в физике можно сделать совсем простыми средствами, достаточно иметь гениальное воображение, наблюдательность и золотые руки.

Одно из удивительнейших открытий прошлого века было сделано с помощью проволоочки, через которую пропускался электрический ток, и простого компаса. Нельзя сказать, что это открытие было совершенно случайным. Старший современник Рассела — Ханс Кристиан Эрстед (1777—1851) был буквально одержим идеей о связи между различными явлениями природы, в том числе между теплотой, звуком, электричеством, магнетизмом*). В 1820 г. во время лекции, посвященной поискам связей магнетизма с «гальванизмом» и электричеством, Эрстед заметил, что при пропускании тока через провод, параллельный стрелке компаса, стрелка отклоняется. Это наблюдение вызвало огромный интерес в образованном обществе, а в науке породило лавину открытий, начатую Андре Мари Ампером (1775—1836).

В знаменитой серии работ 1820—1825 гг. Ампер заложил основы единой теории электричества и магнетизма и назвал ее *электродинамикой*. Затем последовали великие открытия гениального самоучки Майкла Фарадея (1791—1867), сделанные им в основном в 30—40-х годах, — от наблюдения электромагнитной индукции в 1831 г. до формирования к 1852 г. понятия электромагнитного поля. Свои поражающие воображение современников опыты Фарадей тоже ставил, используя самые простые средства.

В 1853 г. Герман Гельмгольц, с которым мы скоро познакомимся поближе, напишет: «Мне удалось познакомиться с Фарадеем, действительно первым физиком Англии и Европы... Он прост, любезен и непритязателен, как ребенок; такого располагающего к себе человека я еще не встречал... Он был всегда предупредителен, показал мне все, что стоило посмотреть. Но осматривать пришлось немного, так как ему для его великих открытий служат старые кусочки дерева, проволоки и железа».

В это время электрон еще неизвестен. Хотя подозрения о существовании элементарного электрического заряда появились у Фарадея уже в 1834 г. в связи с открытием законов электролиза, научно установленным фактом его существование стало лишь в конце столетия, а сам термин «электрон» будет введен только в 1891 г.

*) Тесную связь между электрическими и магнитными явлениями первым подметил еще в конце XVIII в. петербургский академик Франц Эпинус.



Майкл Фарадей
(1791 – 1867)



Джеймс Клерк Максвелл
(1831 – 1879)

Полная математическая теория электромагнетизма еще не создана. Ее творцу Джеймсу Клерку Максвеллу в 1834 г. было всего три года от роду, и он подрастает в том же самом городе Эдинбурге, где читает лекции по натурфилософии герой нашего рассказа. В это время физика, которая еще не разделилась на теоретическую и экспериментальную, только начинает математизироваться. Так, Фарадей в своих работах не применял даже элементарной алгебры. Хотя Максвелл и скажет позже, что он придерживается «не только идей, но и математических методов Фарадея», это утверждение можно понять лишь в том смысле, что идеи Фарадея Максвелл сумел перевести на язык современной ему математики. В «Трактате об электричестве и магнетизме» он писал:

«Может быть для науки было счастливым обстоятельством то, что Фарадей не был собственно математиком, хотя он был в совершенстве знаком с понятиями пространства, времени и силы. Поэтому у него не было соблазна углубляться в интересные, но чисто математические исследования, которых потребовали бы его открытия, если бы они были представлены в математической форме... Таким образом, он имел возможность идти своим путем и согласовывать свои идеи с полученными фактами, пользуясь естественным, не техническим языком... Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов. Я также нашел, что этот метод можно выразить в обычной математической форме и таким образом сравнить с методами профессиональных математиков».

Если вы спросите меня .назовут ли нынешний век железным веком или веком пара и электричества, я отвечу, не задумываясь, что наш век будет называться веком механического мировоззрения...

Л. Больцман

В то же время механика систем точек и твердых тел, как и механика движений жидкостей (*гидродинамика*), были уже существенно математизированы, т. е. они в значительной степени стали математическими науками. Задачи механики систем точек были полностью сведены к теории *обыкновенных дифференциальных уравнений* (уравнения Ньютона — 1687 г., более общие уравнения Лагранжа — 1788 г.), а задачи гидромеханики — к теории так называемых *дифференциальных уравнений с частными производными* (уравнения Эйлера — 1755 г., уравнения Навье — 1823 г.). Это не значит, что все задачи были решены. Наоборот, в этих науках были впоследствии сделаны глубокие и важные открытия, поток которых не иссякает и в наши дни. Просто механика и гидромеханика достигли того уровня зрелости, когда их основные физические принципы были отчетливо сформулированы и переведены на язык математики.

Естественно, что эти глубоко разработанные науки служили основой для построения теорий новых физических явлений. Понять явление для ученого прошлого века — значило объяснить его на языке законов механики. Образцом последовательного построения научной теории считалась небесная механика. Итоги ее развития были подведены Пьером Симоном Лапласом (1749—1827) в монументальном пятитомном «Трактате о небесной механике», вышедшем в свет в первой четверти века. Эта работа, в которой были собраны и обобщены достижения гигантов XVIII в. — Бернулли, Эйлера, Д'Аламбера, Лагранжа и самого Лапласа, оказала глубокое влияние на формирование «механического миропонимания» в XIX в.

Заметим, что в том же 1834 г. в стройную картину классической механики Ньютона и Лагранжа был добавлен завершающий мазок — знаменитый ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон (1805—1865) придал уравнениям механики так называемый канонический вид (согласно словарю С. И. Ожегова «канонический» означает «принятый за образец, твердо установленный, соответствующий канону») и открыл аналогию между оптикой и механикой. Каноническим уравнениям Гамильтона суждено было сыграть выдающуюся роль в конце века при создании статистической механики, а оптико-механическая аналогия, установившая связь между распространением волн и движением частиц, была использована в 20-е годы нашего века творцами квантовой теории. Идеи Гамильтона, который первым глубоко проанализировал понятие волн и частиц и связи между ними, сыграли немалую роль и в теории солитонов.

Развитие механики и гидромеханики, так же как и теории деформаций упругих тел (*теории упругости*), подстегивалось

потребностями развивающейся техники. Дж. К. Максвелл много занимался также и теорией упругости, теорией устойчивости движения с приложениями к работе регуляторов, строительной механикой. Более того, разрабатывая свою электромагнитную теорию, он постоянно прибегал к наглядным моделям: «... сохраняю надежду при внимательном изучении свойств упругих тел и вязких жидкостей найти такой метод, который позволил бы дать и для электрического состояния некоторый механический образ ... (ср. с работой: Уильям Томсон «О механическом представлении электрических, магнитных и гальванических сил», 1847 г.)».

Другой знаменитый шотландский физик Уильям Томсон (1824—1907), впоследствии получивший за научные заслуги титул лорд Кельвин, вообще считал, что все явления природы необходимо сводить к механическим движениям и объяснять их на языке законов механики. Взгляды Томсона оказали сильное влияние на Максвелла, особенно в его молодые годы. Удивительно, что Томсон, близко знавший и ценивший Максвелла, одним из последних признал его электромагнитную теорию. Это произошло только после знаменитых опытов Петра Николаевича Лебедева по измерению светового давления (1899 г.): «Я всю жизнь воевал с Максвеллом... Лебедев заставил меня сдаться...»

Начало теории волн

Хотя основные уравнения, описывающие движения жидкости, в 30-е годы XIX в. были уже получены, математическая теория волн на воде только начала создаваться. Простейшая теория волн на поверхности воды была дана Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии», впервые изданных в 1687 г. Сто лет спустя знаменитый французский математик Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) назвал этот труд «величайшим произведением человеческого ума». К сожалению, эта теория была основана на неправильном допущении, что частицы воды в волне просто колеблются вверх-вниз. Несмотря на то, что Ньютон не дал правильного описания волн на воде, он верно поставил задачу, и его простая модель вызвала к жизни другие исследования. Впервые правильный подход к поверхностным волнам был найден Лагранжем. Он понял, как можно построить теорию волн на воде в двух простых случаях — для волн с малой амплитудой («мелкие волны») и для волн в сосудах, глубина которых мала по сравнению с длиной волны («мелкая вода»). Лагранж не занимался детальной разработкой

теории волн, так как его увлекали другие, более общие математические проблемы.

Много ли есть людей, которые, любящая игрой волн на поверхности ручейка, думают, как найти уравнения, по которым можно было бы вычислить форму любого волнового гребня?

Л. Больцман

Вскоре было найдено точное и удивительно простое решение уравнений, описывающих волны на воде. Это первое, и одно из немногих точных, решение уравнений гидромеханики получил в 1802 г. чешский ученый, профессор математики в Праге Франтишек Йозеф Герстнер (1756—1832)*).

В волне Герстнера (рис. 1.1), которая может образоваться только на «глубокой воде», когда длина волны много меньше глубины сосуда, частицы жидкости движутся по окружностям. Волна Герстнера — первая изученная волна не-синусоидальной формы. Из того что частицы жидкости движутся по окружностям, можно заключить, что поверхность воды имеет форму *циклоиды* (от греч. «киклос» — круг, и «эйдос» — форма), т. е. кривой, которую описывает какая-нибудь точка колеса, катящегося по ровной дороге. Иногда эту кривую называют *трохоидой* (от греч. «трохос» — колесо), а волны Герстнера — *трохоидальными***). Только для очень мелких волн, когда высота волн становится много меньше их длины, циклоида становится похожей на синусоиду, и волна Герстнера превращается в синусоидальную. Хотя при этом частицы воды и мало отклоняются от своих положений равновесия, движутся они все равно по окружностям, а не качаются вверх-вниз, как полагал Ньютон. Надо заметить, что Ньютон ясно сознавал ошибочность такого допущения, но счел возможным воспользоваться им для грубой приближенной оценки скорости распространения волны: «Все происходит таким образом при предположении, что частицы воды поднимаются и опускаются по отвесным прямым линиям, но их движение вверх и вниз на

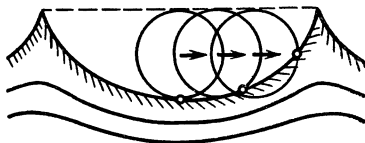


Рис. 1.1

*) Иногда Ф. Й. Герстнера путают с его сыном, Ф. А. Герстнером, несколько лет жившим в России. Под его руководством в 1836—1837 гг. была построена первая в России железная дорога (из Петербурга в Царское Село).

**) Мы будем называть циклоидами кривые, описываемые точками, лежащими на ободе колеса, а трохоидами — кривые, описываемые точками между ободом и осью.

самом деле происходит не по прямой, а вернее по кругу, поэтому я утверждаю, что время дается этим положениям лишь приближенно». Здесь «время» — период колебаний T в каждой точке; скорость волны $v = \lambda/T$, где λ — длина волны. Ньютон показал, что скорость волны на воде пропорциональна $\sqrt{\lambda}$. В дальнейшем мы увидим, что это правильный результат, и найдем коэффициент пропорциональности, который был известен Ньютону лишь приближенно.

Братья Веберы изучают волны

Открытие Герстнера не прошло незамеченным. Надо сказать, что он сам продолжал интересоваться волнами и свою теорию применял для практических расчетов плотин и дамб. Вскоре было положено начало и лабораторному исследованию волн на воде. Это сделали молодые братья Веберы.

Старший брат Эрнст Вебер (1795—1878) сделал впоследствии важные открытия в анатомии и физиологии, в особенности, в физиологии нервной системы. Вильгельм Вебер (1804—1891) стал знаменитым физиком и многолетним сотрудником «короля математиков» К. Гаусса в исследованиях по физике. По предложению и при содействии Гаусса он основал в Геттингенском университете первую в мире физическую лабораторию (1831 г.). Более всего известны его работы по электричеству и магнетизму, а также электромагнитная теория Вебера, которая была позднее вытеснена теорией Максвелла. Он один из первых (в 1846 г.) ввел представление об отдельных частичках электрического вещества — «электрических массах» и предложил первую модель атома, в которой атом уподобился планетарной модели Солнечной системы. Вебер также разработал основанную на идее Фарадея теорию элементарных магнитиков в веществе и изобрел несколько физических приборов, которые для своего времени были весьма совершенными.

Эрнст, Вильгельм и младший их брат Эдуард Веберы серьезно заинтересовались волнами. Они были настоящими экспериментаторами, и простые наблюдения над волнами, которые можно видеть «на каждом шагу», их не могли удовлетворить. Поэтому они сделали простой прибор (*лоток Веберов*), который с разными усовершенствованиями до сих пор используется для опытов с волнами на воде. Построив длинный ящик со стеклянной боковой стенкой и нехитрые приспособления для возбуждения волн, они провели обширные наблюдения различных волн, в том числе и волн Герстнера, теорию которого они таким образом проверили на опыте. Результаты этих наблюдений они опубликовали в 1825 г. в книге под названием «Учение о волнах, основанное на опытах». Это было

первое экспериментальное исследование; в котором систематически изучались волны разной формы, скорость их распространения, соотношения между длиной и высотой волны и т. д. Способы наблюдения были очень простые, остроумные и довольно эффективные. Например, для определения формы поверхности волны они опускают в ванну матовую стеклянную пластину. Когда волна доходит до середины пластины, ее быстро выдергивают; при этом передняя часть волны совершенно правильно отпечатывается на пластине. Чтобы наблюдать пути колеблющихся в волне частиц, они заполняли лоток мутной водой из реки Заале и наблюдали движения невооруженным глазом или с помощью слабого микроскопа. Таким способом они определили не только форму, но и размеры траекторий частиц. Так они обнаружили, что траектории вблизи поверхности близки к окружностям, а при приближении к дну сплющиваются в эллипсы; вблизи самого дна частицы движутся горизонтально. Веберы открыли много интересных свойств волны на воде и в других жидкостях.

О пользе теории волн

Независимо от этого происходила разработка идей Лагранжа, связанная в основном с именами французских математиков Огюстёна Луи Коши (1789—1857) и Симона Дені Пуассона (1781—1840). В этой работе принял участие и наш соотечественник Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862). Эти знаменитые ученые много сделали для науки, их имена носят многочисленные уравнения, теоремы и формулы. Менее известны их работы по математической теории волн малой амплитуды на поверхности воды. Теорию таких волн можно применять к некоторым штормовым волнам на море, к движению судов, к волнам на отмелях и вблизи волноломов и т. д. Ценность математической теории таких волн для инженерной практики очевидна. Но в то же время математические методы, разработанные для решения этих практических задач, были позже применены и к решению совсем других, далеких от гидромеханики проблем. Мы еще не раз встретимся с подобными примерами «всеядности» математики и практической пользы от решения математических задач, на первый взгляд относящихся к «чистой» («бесполезной») математике.

Здесь автору трудно удержаться от небольшого отступления, посвященного одному эпизоду, связанному с появлением единственной работы Остроградского по теории волн. Эта математическая работа не только принесла отдаленную пользу науке и технике,

но и оказала непосредственное и важное влияние на судьбу ее автора, что случается не так уж часто. Вот как излагает этот эпизод выдающийся русский кораблестроитель, математик и инженер, академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945). «В 1815 г. Парижская Академия наук поставила теорию волн темой для «Большого приза по математике». В конкурсе приняли участие Коши и Пуассон. Премирован был обширный (около 300 стр.) мемуар Коши, мемуар Пуассона заслужил почетный отзыв... В это же время (1822 г.) М. В. Остроградский, задолжавший вследствие задержки в высылке (из дома) денег содержателю гостиницы, был им посажен в Клиши (долговая тюрьма в Париже). Здесь он написал «Теорию волн в сосуде цилиндрической формы» и послал свой мемуар Коши, который не только одобрил эту работу и представил ее Парижской Академии наук для напечатания в ее трудах, но и, не будучи богатым, выкупил Остроградского из долговой тюрьмы и рекомендовал его на должность учителя математики в один из лицеев в Париже. Ряд математических работ Остроградского обратил на него внимание С.-Петербургской Академии наук, и в 1828 г. он был избран в ее адъюнкты, а затем и в ординарные академики, имея лишь аттестат студента Харьковского университета, уволенного, не окончив курс».

Добавим к этому, что Остроградский родился в небогатой семье украинских дворян, в 16 лет он поступил на физико-математический факультет Харьковского университета по воле отца, вопреки собственным желаниям (он хотел стать военным), но очень скоро проявились его выдающиеся способности к математике. В 1820 г. он с отличием сдал экзамены на кандидата, однако министр народного просвещения и духовных дел князь А. Н. Голицын не только отказал ему в присуждении степени кандидата, но и лишил ранее выданного диплома об окончании университета. Основанием послужили обвинения его в «безбожии и вольнодумстве», в том, что он «не посещал не только лекции философии, но и богословия и христианского учения». В результате Остроградский уехал в Париж, где усердно посещал лекции Лапласа, Коши, Пуассона, Фурье, Ампера и других выдающихся ученых. Впоследствии Остроградский стал член-корреспондентом Парижской Академии наук, членом Туринской, Римской и Американской академий и т. д.

Работа о волнах, упомянутая А. Н. Крыловым, была опубликована в трудах Парижской Академии наук в 1826 г. Она посвящена волнам малой амплитуды, т. е. задаче, над которой работали Коши и Пуассон. Больше к исследованию волн Остроградский не возвращался. Помимо чисто математических работ известны его исследования по гамильтоновой механике, одна из первых работ по изучению влияния нелинейной силы трения на движение снарядов в воздухе (эта задача была поставлена еще Эйлером). Остроградский был один из первых, кто осознал необходимость изучения нелинейных колебаний и нашел остроумный способ приближенного учета малых нелинейностей в колебаниях маятника (задача Пуассона). К сожалению, многие свои научные начинания он не довел до конца — слишком много сил приходилось отдавать педагогической

работе, прокладывающей дорогу новым поколениям ученых. Уже за одно это мы должны быть благодарны ему, как и другим российским ученым начала прошлого века, упорным трудом создавшим фундамент будущего развития науки в нашей стране.

Вернемся, однако, к нашему разговору о пользе волн. Можно привести замечательный пример применения идей теории волн к совсем другому кругу явлений. Речь идет о гипотезе Фарадея о волновом характере процесса распространения электрических и магнитных взаимодействий.

Фарадей уже при жизни стал знаменитым ученым, о нем и о его работах написаны многие исследования и популярные книги. Однако мало кто и сегодня знает, что Фарадей серьезно интересовался волнами на воде. Не владея математическими методами, известными Коши, Пуассону и Остроградскому, он очень ясно и глубоко понимал основные идеи теории волн на воде. Размышляя о распространении электрического и магнитного полей в пространстве, он попытался представить себе этот процесс по аналогии с распространением волн на воде. Эта аналогия, видимо, и привела его к гипотезе о конечности скорости распространения электрических и магнитных взаимодействий и о волновом характере этого процесса. 12 марта 1832 г. он записал эти мысли в специальном письме: «Новые воззрения, подлежащие в настоящее время хранению в запечатанном конверте в архивах Королевского общества». Мысли, изложенные в письме, далеко опережали свое время, по сути дела здесь впервые сформулирована идея об электромагнитных волнах. Это письмо было погребено в архивах Королевского общества, его обнаружили лишь в 1938 г. Видимо, и сам Фарадей забыл о нем (у него постепенно развилось тяжелое заболевание, связанное с потерей памяти). Основные идеи письма он изложил позже в работе 1846 г.

Разумеется, сегодня невозможно точно восстановить ход мыслей Фарадея. Но его размышления и опыты над волнами на воде незадолго до составления этого замечательного письма отражены в опубликованной им в 1831 г. работе. Она посвящена исследованию мелкой ряби на поверхности воды, т. е. так называемым «капиллярным» волнам*) (подробнее о них будет рассказано в гл. 5). Для их исследования он придумал остроумный и, как всегда, очень простой приборчик. Впоследствии метод Фарадея использовал Рассел, наблюдавший другие малозаметные, но красивые и интересные явления

*) Эти волны связаны с силами поверхностного натяжения воды. Те же самые силы вызывают подъем воды в тончайших, толщиной с волос, трубочках (латинское слово *capillus* и означает волос).

с капиллярными волнами. Опыты Фарадея и Рассела описаны в §§ 354—356 книги Рэлея (Джон Уильям Стрэтт, 1842—1919) «Теория звука», которая была впервые издана в 1877 г., но до сих пор не устарела и может доставить огромное удовольствие читателю (есть русский перевод). Рэлей не только много сделал для теории колебаний и волн, но и один из первых признал и оценил уединенную волну.

О главных событиях эпохи

Совершенствования науки следует ждать не от способности или проворства какого-нибудь отдельного человека, а от последовательной деятельности многих поколений, сменяющих друг друга.

Ф Бэкон

Между тем нам пора заканчивать несколько затянувшуюся историческую экскурсию, хотя картина науки той поры получилась, пожалуй, слишком однобокой. Чтобы как-то исправить это, совсем кратко напомним о событиях тех лет, которые историки науки справедливо считают наиболее важными. Как уже говорилось, все основные законы и уравнения механики были сформулированы к 1834 г. в том самом виде, в котором мы ими пользуемся и сегодня. К середине века были написаны и стали подробно изучаться основные уравнения, описывающие движения жидкостей и упругих тел (гидродинамика и теория упругости). Как мы видели, волны в жидкостях и в упругих телах интересовали многих ученых. Физиков, однако, гораздо сильнее увлекали в это время световые волны.

В первой четверти века, в основном благодаря таланту и энергии Томаса Юнга (1773—1829), Огюстена Жана Френеля (1788—1827) и Доминика Франсуа Араго (1786—1853), победила волновая теория света. Победа не была легкой, ибо среди многочисленных противников волновой теории были такие крупные ученые, как Лаплас и Пуассон. Критический опыт, окончательно утвердивший волновую теорию, был сделан Араго на заседании комиссии Парижской академии наук, обсуждавшей представленную на конкурс работу Френеля о дифракции света. В докладе комиссии об этом рассказано так: «Один из членов нашей комиссии, месье Пуассон, вывел из сообщенных автором интегралов тот удивительный результат, что центр тени от крупного непрозрачного экрана должен быть таким же освещенным, как и в том случае, если бы экран не существовал... Это следствие было проверено прямым опытом и наблюдение полностью подтвердило данные вычисления».

Это произошло в 1819 г., а в следующем году сенсацию вызвало уже упоминавшееся открытие Эрстеда. Публикация Эрстедом работы «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку», породила лавину опытов по электромагнетизму. Общеизвестно, что наибольший вклад в эту работу внес Ампер. Работа Эрстеда была опубликована в Копенгагене в конце июля, в начале сентября Араго объявляет об этом открытии в Париже, а в октябре появляется всем известный закон Био — Савара — Лапласа. С конца сентября Ампер выступает почти еженедельно (!) с сообщениями о новых результатах. Итоги этой дофарадеевской эпохи в электромагнетизме подведены в книге Ампера «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта».

Заметьте, как быстро распространялись и в то время известия о событиях, которые вызывали всеобщий интерес, хотя средства связи были менее совершенные, чем сегодня (идея телеграфной связи была высказана Ампером в 1829 г., и только в 1844 г. в Северной Америке начала работать первая коммерческая телеграфная линия). Быстро стали широко известными и результаты опытов Фарадея. Этого, однако, нельзя сказать о распространении теоретических идей Фарадея, объяснявших его опыты (понятие о силовых линиях, электротоническом состоянии, т. е. об электромагнитном поле).

Первым всю глубину идей Фарадея оценил Максвелл, который и сумел найти для них подходящий математический язык. Но это произошло уже в середине века. Читатель может спросить, почему же столь по-разному воспринимались идеи Фарадея и Ампера. Дело, видимо, в том, что электродинамика Ампера уже созрела, «носилась в воздухе». Нисколько не умаляя великих заслуг Ампера, который первым придал этим идеям точную математическую форму, нужно все же подчеркнуть, что идеи Фарадея были гораздо более глубокими и революционными. Они не «носились в воздухе», а были рождены творческой мощью мысли и фантазии их автора.

Третье важнейшее направление в физике первой половины прошлого века — начало развития учения о теплоте. Первые шаги теории тепловых явлений, естественно, были связаны с работой паровых машин, а общие теоретические идеи формировались трудно и проникали в науку медленно. Замечательная работа Сади Карно (1796—1832) «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», опубликованная в 1824 г., прошла совершенно незамеченной. О ней вспомнили лишь благодаря появившейся в 1834 г. работе Клапейрона, но создание современной теории теплоты (термодинамики) — дело уже второй половины века.

С интересующими нас вопросами тесно связаны две работы. Одна из них — знаменитая книга выдающегося математика, фи-

зика и египтолога*) Жана Батиста Жозефа Фурье (1768—1830) «Аналитическая теория теплоты» (1822 г.), посвященная решению задачи о распространении тепла; в ней был детально разработан и применен к решению физических задач метод разложения функций на синусоидальные составляющие (*разложение Фурье*). От этой работы обычно отсчитывают зарождение математической физики как самостоятельной науки. Ее значение для теории колебательных и волновых процессов огромно — в течение более чем столетия основным способом исследования волновых процессов стало разложение сложных волн на простые *синусоидальные (гармонические) волны* или «гармоники» (от «гармонии» в музыке).

Другая работа — доклад двадцатилетнего Гельмгольца «О сохранении силы», сделанный в 1847 г. на заседании основанного им Физического общества в Берлине. Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц (1821—1894) по праву считается одним из величайших естествоиспытателей, а эту его работу некоторые историки науки ставят в один ряд с наиболее выдающимися трудами ученых, заложивших основы естественных наук. В ней идет речь о наиболее общей формулировке принципа сохранения энергии (тогда ее называли «силой») для механических, тепловых, электрических («гальванических») и магнитных явлений, включая и процессы в «организованном существе». Для нас особенно интересно, что здесь Гельмгольц впервые отметил колебательный характер разряда лейденской банки и написал уравнение, из которого вскоре У. Томсон вывел формулу для периода электромагнитных колебаний в колебательном контуре.

В этой небольшой работе можно разглядеть намеки на будущие замечательные исследования Гельмгольца. Даже простое перечисление его достижений в физике, гидромеханике, математике, анатомии, физиологии и психофизиологии увело бы нас очень далеко в сторону от основной темы нашего рассказа. Упомянем лишь теорию вихрей в жидкости, теорию происхождения морских волн и первое определение скорости распространения импульса в нерве. Все эти теории, как мы вскоре увидим, имеют самое непосредственное отношение к современным исследованиям солитонов. Из других его идей

*) После наполеоновского похода в Египет он составил «Описание Египта» и собрал небольшую, но ценную коллекцию египетских древностей. Фурье направлял первые шаги юного Жана-Франсуа Шампольона, гениального дешифровщика иероглифического письма, основоположника египтологии. Дешифровкой иероглифов увлекался не без успеха и Томас Юнг. После занятий физикой это было, пожалуй, главным его увлечением.

необходимо упомянуть впервые высказанное им в лекции, посвященной физическим воззрениям Фарадея (1881 г.), представление о существовании элементарного («наименьшего возможного») электрического заряда («электрических атомов»). На опыте электрон был обнаружен лишь шестнадцать лет спустя.

Обе описанные работы были теоретическими, они составили фундамент математической и теоретической физики. Окончательное становление этих наук связано, несомненно, с работами Максвелла, а в первой половине века чисто теоретический подход к физическим явлениям был в общем-то чужд большинству ученых. Физика считалась наукой чисто «опытной» и главными словами в названиях работ были «опыт», «основанный на опытах», «выведенные из опытов». Интересно, что сочинение Гельмгольца, которое и в наши дни можно считать образцом глубины и ясности изложения, не было принято физическим журналом как теоретическое и слишком большое по объему и было позднее выпущено в свет отдельной брошюрой. Незадолго до смерти Гельмгольц так говорил об истории создания своей самой знаменитой работы:

«Молодые люди всего охотнее берутся сразу за самые глубокие задачи, так и меня занял вопрос о загадочном существе жизненной силы... я нашел, что... теория жизненной силы ... приписывает всякому живому телу свойства «вечного двигателя»... Проматривая сочинения Даниила Бернулли, Д'Аламбера и других математиков прошлого столетия... я натолкнулся на вопрос: «какие отношения должны существовать между различными силами природы, если принять, что «вечный двигатель» вообще невозможен и выполняются ли в действительности все эти соотношения... Я намеревался только дать критическую оценку и систематику фактов в интересах физиологов. Для меня не было бы неожиданностью, если бы в конце концов сведущие люди сказали мне: «Да все это отлично известно. Чего хочет этот юный медик, распространяясь так подробно об этих вещах?» К моему удивлению, те авторитеты по физике, с которыми мне пришлось войти в соприкосновение, посмотрели на дело совершенно иначе. Они были склонны отвергать справедливость закона; среди той ревностной борьбы, какую они вели с натурфилософией Гегеля, и моя работа была сочтена за фантастическое уместование. Только математик Якоби признал связь между моими рассуждениями и мыслями математиков прошлого века, заинтересовался моим опытом и защищал меня от недоразумений».

Эти слова ярко характеризуют умонастроение и интересы многих ученых той эпохи. В таком сопротивлении научного общества новым идеям есть, конечно, закономерность и даже необходимость. Так что не будем торопиться осуждать Лапласа, не понимавшего Френеля, Вебера, не признававшего идей Фарадея, или Кельвина, противившегося признанию

теории Максвелла, а лучше спросим себя, легко ли дается нам самим усвоение новых, непохожих на все, с чем мы свыклись, идей. Признаём, что некоторый консерватизм заложен в нашей человеческой природе, а значит, и в науке, которую делают люди. Говорят, что некий «здоровый консерватизм» даже необходим для развития науки, так как он препятствует распространению пустых фантазий. Однако это отнюдь не утешает, когда вспоминаешь о судьбах гениев, заглянувших в будущее, но не понятых и не признанных своей эпохой.

Твой век, дивясь тебе, пророчеств не постиг
И с лестью смешивал безумные упреки

В. Брюсов

Может быть, самые яркие примеры такого конфликта с эпохой в интересующее нас время (около 1830 г.) мы видим в развитии математики. Лицо этой науки тогда определяли, вероятно, Гаусс и Коши, завершавшие вместе с другими постройку великого здания математического анализа, без которого современная наука просто немыслима. Но мы не можем забыть и о том, что в это же время, не оцененные современниками, умерли молодые Абель (1802—1829) и Галуа (1811—1832), что с 1826 по 1840 гг. публиковали свои работы по неевклидовой геометрии Лобачевский (1792—1856) и Бойяи (1802—1860), не дожившие до признания своих идей. Причины такого трагического непонимания глубоки и многообразны. Мы не можем углубляться в них, а приведем лишь еще один пример, важный для нашего рассказа.

Как мы увидим позже, судьба нашего героя, солитона, тесно связана с вычислительными машинами. Более того, история преподносит нам поразительное совпадение. В августе 1834 г., в то самое время, когда Рассел наблюдал уединенную волну, английский математик, экономист и инженер-изобретатель Чарльз Бэббедж (1792—1871) закончил разработку основных принципов своей «аналитической» машины, которые легли впоследствии в основу современных цифровых вычислительных машин. Идеи Бэббеджа далеко опередили свое время. Для реализации его мечты о постройке и использовании таких машин потребовалось более ста лет. В этом трудно винить современников Бэббеджа. Многие понимали необходимость вычислительных машин, но техника, наука и общество еще не созрели для осуществления его смелых проектов. Лишь в 1944 г. появились первые автоматические цифровые машины, и в английском журнале «Nature» («Природа») появилась статья под названием «Мечта Бэббеджа сбылась».

Наука и общество

Дружина ученых и писателей.. всегда впереди во всех набегах просвещения, на всех приступах образованности. Не должно им малодушно негодовать на то, что вечно им определено выносить первые выстрелы и все невзгоды, все опасности.

А. С. Пушкин

Конечно, и успехи науки, и ее неудачи связаны с историческими условиями развития общества, на которых мы не можем задерживать внимание читателя. Не случайно именно в то время возник такой напор новых идей, что наука и общество не успевали их осваивать.

Развитие науки в разных странах шло неодинаковыми путями.

Во Франции научная жизнь объединялась и организовывалась Академией до такой степени, что работа, не замеченная и не поддержанная Академией или хотя бы известными академиками, имела мало шансов заинтересовать ученых. Зато уж работы, попавшие в поле зрения Академии, поддерживались и развивались. Это иногда вызывало протесты и возмущение со стороны молодых ученых. В статье, посвященной памяти Абея, его друг Сегі писал: «Даже в случае Абея и Якоби благосклонность Академии означала не признание несомненных заслуг этих молодых ученых, а скорее стремление поощрить исследование некоторых проблем, касающихся строго определенного круга вопросов, за пределами которого, по мнению Академии, не может быть прогресса науки и нельзя сделать никаких ценных открытий... Мы же скажем совсем другое: молодые ученые, не слушайте никого, кроме вашего собственного внутреннего голоса. Читайте труды гениев и размышляйте над ними, но никогда не превращайтесь в учеников, лишенных собственного мнения... Свобода взглядов и объективность суждений — таков должен быть ваш девиз». (Пожалуй, «не слушать никого» — полемическое преувеличение, «внутренний голос» не всегда прав.)

Во множестве мелких государств, находившихся на территории будущей Германской империи (лишь к 1834 г. были закрыты таможи между большинством этих государств), научная жизнь была сосредоточена в многочисленных университетах, в большинстве которых велась также исследовательская работа. Именно там в это время начали складываться школы ученых и выходило большое число научных журналов, которые постепенно стали главным средством общения между учеными, неподвластным пространству и времени. Их образцу следуют и современные научные журналы.

На британских островах не было ни академии французского типа, пропагандировавшей признанные ею достижения, ни та-

ких научных школ, как в Германии. Большинство английских ученых работало в одиночку *). Этим одиночкам удавалось прокладывать совершенно новые пути в науке, но их работы часто оставались совершенно неизвестными, особенно когда они не были посланы в журнал, а лишь доложены на заседаниях Королевского общества. Жизнь и открытия эксцентричного вельможи и гениального ученого, лорда Генри Кавендиша (1731 — 1810), работавшего в полном одиночестве в собственной лаборатории и опубликовавшего лишь две работы (остальные, содержавшие открытия, переоткрытые другими лишь десятки лет спустя, были найдены и опубликованы Максвеллом), особенно ярко иллюстрируют эти особенности науки в Англии на рубеже XVIII — XIX вв. Такие тенденции в научной работе сохранялись в Англии довольно продолжительное время. Например, уже упоминавшийся лорд Рэлей также работал как любитель, большую часть своих опытов он выполнил в своей усадьбе. Этим «любителем», помимо книги о теории звука, было написано больше четырехсот работ! Несколько лет работал в одиночестве в своем родовом гнезде и Максвелл.

В результате, как писал об этом времени английский историк науки, «наибольшее число совершенных по форме и содержанию трудов, ставших классическими... принадлежит, вероятно, Франции; наибольшее количество научных работ было выполнено, вероятно, в Германии; но среди новых идей, которые на протяжении века оплодотворяли науку, наибольшая доля, вероятно, принадлежит Англии». Последнее утверждение вряд ли можно отнести к математике. Если же говорить о физике, то это суждение кажется не слишком далеким от истины. Не забудем также, что современником Рассела **) был великий Чарльз Дарвин, который родился на год позже и умер в один год с ним.

В чем же причина успехов исследователей-одиночек, почему они смогли прийти к настолько неожиданным идеям, что многим другим не менее одаренным ученым они казались не

*) Не нужно воспринимать это слишком буквально. Любой ученый нуждается в постоянном общении с другими учеными. В Англии центром такого общения было Королевское научное общество, которое также располагало немалыми средствами для финансирования научных исследований.

**) Большинство упоминаемых нами современников, вероятно, были знакомы друг с другом. Разумеется, члены Королевского общества встречались на заседаниях, но, кроме того, они поддерживали и личные связи. Например, известно, что Чарльз Дарвин бывал на приемах у Чарльза Бэббеджа, который со студенческих лет дружил с Джоном Гершелем, который близко знал Джона Рассела и т. д.

просто неправильными, а даже почти безумными? Если сопоставить Фарадея и Дарвина — двух великих естествоиспытателей первой половины прошлого века, то бросается в глаза их необычайная независимость от учений, господствовавших в то время, доверие собственным зрению и разуму, великая изобретательность в постановке вопросов и стремление до конца понять то необычное, что им удалось наблюдать. Важно и то, что образованное общество не равнодушно к научным изысканиям. Если и нет понимания, то есть интерес, и вокруг первооткрывателей и новаторов обычно собирается кружок поклонников и сочувствующих. Даже у непонятого и ставшего к концу жизни мизантропом Бэббеджа были любящие и ценящие его люди. Его понимал и высоко ценил Дарвин, близким его сотрудником и первым программистом его аналитической машины стала выдающийся математик, дочь Байрона, леди Ада Августа Лавлейс. Бэббеджа также ценил Фарадей и другие выдающиеся люди его времени.

Общественное значение научных исследований уже стало понятным многим образованным людям, и это иногда помогало получать ученым необходимые средства, несмотря на отсутствие централизованного финансирования науки. К концу первой половины XVIII в. Королевское общество и ведущие университеты располагали большими средствами, чем любые ведущие научные учреждения на континенте. «...Плеяда выдающихся ученых-физиков, как Максвелл, Рэлей, Томсон... не могла бы возникнуть, если бы... в Англии в то время не существовало бы культурной научной общественности, правильно оценивающей и поддерживающей деятельность ученых» (П. Л. Капица).

Глава 2

БОЛЬШАЯ УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА ДЖОНА СКОТТА РАССЕЛА

Богатство мира в оригинальных людях.. Воспоминание об этих людях и история их жизни — сумма его силы, его священная собственность на вечные времена

Т. Карлейль

Если обдумать все, что мы вспомнили или узнали о науке того времени, то становится ясно, что наблюдение и научное описание уединенной волны не столь уж случайны. Удивительно скорее то впечатление, которое произвела эта волна на ее первооткрывателя, посвятившего ей значительную часть своей богатой событиями жизни. Здесь судьба явления

связана с судьбой человека, его открывшего, и стоит немного познакомиться с его жизнью. Открытие уединенной волны не описано в курсах истории физики, математики и механики, и имени Рассела нет в справочниках о биографиях выдающихся деятелей этих наук. Первое жизнеописание Рассела появилось лишь в 1977 г.: «Джон Скотт Рассел — великий инженер и кораблестроитель викторианской эпохи». Ее автор, английский профессор Дж. Эмерсон, испытывал немалые трудности из-за «бедности первоисточников и обескураживающе сильного стирающего влияния времени». Мы познакомимся лишь с основными событиями его жизни, связанными с историей солитона.

До роковой встречи

Дж. С. Рассел родился в Шотландии недалеко от Глазго в семье священника. Отец надеялся, что сын пойдет по его стопам, но очень рано обнаружилась склонность мальчика к точным наукам, и он стал изучать их в трех шотландских университетах (из существовавших тогда четырех). Он слушал лекции в университетах Эдинбурга, Глазго и Сент-Андрю (самый старый университет в Шотландии, основан в 1411 г., находится вблизи Эдинбурга) и окончил первоначальный курс наук, получив в 16 лет степень бакалавра *).

Столь раннее начало в то время не было редкостью. Например, Томас Юнг, к 14 годам в совершенстве владевший десятью языками, в 20 лет публикует первую научную работу и в 22 года он уже доктор медицины. Гамильтон в 13 лет уже владеет тринадцатью языками, а в 16 лет читает «Небесную механику» Лапласа и находит в ней ошибку. В Шотландии вообще было принято поступать в университет в возрасте 16–17 лет, но особо одаренные дети начинали учебу и раньше. Уильям Томсон в 8 лет посещает в университете Глазго лекции своего отца, профессора математики. В десятилетнем возрасте он официально зачислен студентом университета, а в 15 лет публикует первую научную работу. В 21 год он заканчивает еще и Кембриджский университет, а в 22 года уже становится профессором физики в Глазго. Максвелл по традиции поступил в Эдинбургский университет в возрасте 16 лет, но годом раньше он уже опубликовал в трудах Эдинбургского Королевского общества свою первую научную статью об овальных кривых. В 19 лет он заканчивает Эдинбургский университет, а еще через три года — Кембриджский. Это тоже было традицией, так как образование, приобретенное в

*) В Англии это низшая университетская степень, получаемая после окончания двух-трех курсов; следующая степень — после окончания учебы в университете — магистр, а затем — доктор соответствующих наук.

шотландских университетах, ценилось меньше, чем то, которое получали студенты в «главных» университетах Британских островов — Кембриджском и Оксфордском. В возрасте 25 лет Максвелл уже профессор Абердинского университета (четвертый шотландский университет).

Конечно, не у всех жизнь складывалась так легко. Путь в науку Рассела не был простым, но по его началу можно судить, что Джон был довольно одаренным юношей.

После окончания университета он два года работает на фабрике, затем преподает в Эдинбургском университете, и его лекции пользуются успехом у студентов. В 1832—1833 гг. он читает курс лекций по натурфилософии вместо скончавшегося профессора Лесли.

Джон Лесли (1766—1832) был известным ученым, наибольшее признание заслужили его исследования по испусканию и поглощению тепла и изобретенные им приборы. Приглашение двадцатичетырехлетнего Рассела читать лекции вместо Лесли говорит о том, что его знания и педагогические способности ценились достаточно высоко. Тем не менее на место Лесли был избран профессором сверстник Рассела Джеймс Дэвид Форбс (1809—1868), который начал вести экспериментальную работу по физике и впоследствии приобрел известность исследованиями в теории теплопереноса и ледников. Профессор Форбс первым сумел оценить талант Максвелла. Он докладывал Эдинбургскому Королевскому обществу первую научную работу юноши и впоследствии предложил ему принять участие в конкурсе на вакантное место профессора физики в Абердинском университете.

Расселу, видимо, не была суждена спокойная университетская карьера. В 1838 г. он еще раз попробовал стать профессором Эдинбургского университета. На этот раз освободилась должность профессора математики, но несмотря на рекомендацию самого Гамильтона, аттестовавшего Рассела как «человека талантливого, активного и изобретательного», получить ему эту должность также не удалось. Почему так сложилось, мы не знаем. Возможно, что Рассел был слишком независимым, беспокойным и увлекающимся человеком для академической карьеры. В 1857 г. Максвелл, тогда уже профессор Абердинского университета, написал о системе подбора профессоров в шотландских университетах: «...Они хотят иметь профессорами угодных им людей, заинтересованных в преподавании того, что выгодно определенному узкому кругу... Их легче подчинить влиянию родителей и местной прессы». Так или иначе, но жизнь Рассела в результате пошла по иному, более беспокойному пути.

Тем временем он изобрел паровой экипаж, и в 1834 г. была даже основана Шотландская компания паровых экипажей. Она просуществовала недолго, но благодаря работе в этой компании Рассел приобрел некоторую известность как талантливый инженер-изобретатель. Когда другая компания (Union Canal Company) решила заняться навигацией паровых судов по каналу, соединяющему Эдинбург и Глазго, ему предложили исследовать возможности осуществления этого предприятия. Там и состоялось первое знакомство Рассела с уединенной волной, о котором он впервые доложил в 1838 г. Подробное описание этого наблюдения и выполненных им экспериментов было опубликовано в 1844 г. («Доклад о волнах»).

Встреча с уединенной волной

И глубоко впечатление
В сердце врезалось ему.

А. С. Пушкин

В то время для перевозок по каналу использовали небольшие баржи, которые тащили лошади. Для того чтобы выяснить, как нужно строить эти баржи при переходе от лошадиной тяги к паровой, Рассел проводил эксперименты с баржами различной формы, движущимися с разными скоростями. В ходе этих опытов он обнаружил явление, которое описал в «Докладе о волнах»:

«Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась. Вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я называл волной трансляции; теперь это название общепринято.

С тех пор я обнаружил, что такие волны играют важную роль почти во всех случаях, когда жидкость оказывает сопротивление движению, и пришел к убеждению, что к тому же типу относятся огромные движущиеся повышения уровня моря, которые с регулярностью обращения небесного тела входят в наши реки и катятся вдоль наших побережий.

Для подробного изучения этого явления с целью точно установить его природу и управляющие им законы я придумал другие, более удобные способы его вызвать... и применил разнообразные методы наблюдений».

Рассел установил следующие основные свойства уединенных волн. 1. *Постоянство скорости и неизменность формы отдельной уединенной волны.* 2. *Зависимость скорости v от глубины канала h и высоты волны y_0 : $v = \sqrt{g(y_0 + h)}$, где g — ускорение свободного падения; при этом $y_0 < h$.* 3. *Распад достаточно большой волны на две или более уединенные волны: «Волна примет... свою обычную форму... и будет идти вперед, сохраняя объем и высоту; она освободится от лишнего вещества, которое двигалось с ней, оставит его позади, и эта оставшаяся волна будет следовать за ней, но с меньшей скоростью, так что, хотя сначала две волны были соединены в одну составную, они затем отделяются друг от друга и все больше и больше расходятся по мере продвижения» (см. рис. 2.1 — рисунок Рассела).* 4. *Наблюдаются только волны*



Рис. 2.1

повышения. Рассел также однажды отметил, что «*большие первичные волны трансляции проходят друг через друга без каких-либо изменений, таким же образом, как и малые колебания, производимые упавшим на поверхность воды камнем.*» В дальнейшем он, правда, не возвращался к этому явлению, которое так поразило ученых, вновь открывших его 130 лет спустя при совсем иных обстоятельствах.

Между прочим, повторить, казалось бы, такой простой опыт Рассела на самом деле не так-то просто. В этом убедились участники конференции «Солитон-82», съехавшиеся в Эдинбург из 24 стран на конференцию, приуроченную к столетию со дня смерти Рассела. Они попытались получить уединенную волну на том самом месте, где ее наблюдал Рассел. Канал сохранился, и по-прежнему по нему плавают лодки и баржи, многие из которых сохранили старинные формы.

Все вроде бы благоприятствовало предприятию. Но то ли из-за замены лошадиных сил человеческими (энтузиасты на время стали бурлаками), то ли из-за того, что на берегу за полтора года выросли деревья, то ли из-за плохой погоды, то ли по какой-то другой причине, а волна из уединения не вышла. Не получился солитон!

Рассел ввел довольно тонкую классификацию волн, различая «обособленные» (уединенные) и «стадные» (групповые) типы и подразделяя их на четыре рода (обратите внимание на сходство этой классификации с зоологической). К стадным он отнес обычные ветровые волны, группы волн, которые мы теперь называем *волновыми пакетами*, а также капиллярные волны. Он отличал обособленные волны разного рода, выделил наиболее интересовавшую его уединенную волну в первый род и назвал ее «большой» или «первичной» волной трансляции. Все эти наблюдения и их обобщения говорят о выдающейся наблюдательности Рассела и его изобретательности в постановке опытов. В то же время он глубоко обдумывал результаты этих опытов, что привело его к новым идеям в кораблестроении. Но об этом позже, а сейчас нас интересует, как была воспринята уединенная волна другими учеными.

Этого не может быть!

На континенте работа Рассела, видимо, не была замечена. Однако в Англии этой работой заинтересовались Эри и Стокс. К сожалению, Гамильтон, который много знал о волнах и, в частности, первым понял, что скорость движения небольшого пакета волн (*групповая скорость*) может отличаться от скорости распространения самой волны, не проявил интереса к новым наблюдениям. В это время он был уже увлечен открытым им обобщением комплексных чисел — кватернионами (это система своеобразных чисел с тремя мнимыми единицами, тесно связанных с векторами в пространстве). Этому увлечению он не изменил до конца жизни.

Королевский астроном Джордж Биддел Эри (1801 — 1892) обладал многими талантами и быстро стал заметной фигурой в английской науке и в обществе. В 22 года Эри заканчивает Кембриджский университет, в 25 лет он его профессор, в 27 лет — директор университетской обсерватории, а в 34 года он становится директором знаменитой Гринвичской обсерватории и остается на этом посту в течение 45 лет! Эри много сделал для науки, особенно же он способствовал использованию научных достижений в жизни общества. О его деятельности по организации первой в мире службы точного

времени можно прочесть в очень интересной и богато иллюстрированной книжке «Гринвичское время» *).

Эри придирчиво изучил доклад Рассела и в своей работе «Приливы и волны», опубликованной в 1845 г., подверг критике его выводы об уединенной волне. Он отмечает, что формула Рассела для скорости уединенной волны не получается из теории длинных волн на мелкой воде, утверждает, что длинные волны в каналах не могут сохранять постоянную форму, и заключает: «Мы не склонны соглашаться с тем, что эта волна заслуживает эпитетов „большая“ или „первичная“...» Эта работа сыграла двойственную роль в судьбе уединенной волны. С одной стороны, в ней был правильно поставлен вопрос о ее математическом описании с помощью лагранжевой теории «мелкой воды», а не «мелкой волны». С другой стороны, чересчур категорическое отрицание правильности наблюдений и выводов Рассела таким известным специалистом, как Эри, не способствовало увеличению интереса к этому явлению, а кто же хочет заниматься неинтересными проблемами!

Здесь уместно вспомнить, что за свой чрезмерно «здоровый научный консерватизм» Эри вскоре пришлось поплатиться. Как раз в 1845—1846 гг. произошли шумные события, связанные с открытием планеты Нептун. Эри один из первых заметил нерегулярности в движении планеты Уран, но когда молодой математик Джон Адамс представил ему вычисления, из которых как будто следовало существование еще одной планеты, Эри отнесся к этому крайне скептически. Лишь после того, как Леверье независимо пришел к тем же выводам, что и Адамс, Эри дал указания о поисках новой планеты, но тем временем она уже была обнаружена немецкими астрономами. Заметим, что Леверье также не сумел убедить своих французских коллег уделить хоть немного времени проверке его предсказания. Подробности этой поучительной истории можно найти в небольшой книжке «Планета Плутон» **).

Джордж Габриель Стокс (1819—1903) увлекся гидродинамикой, еще будучи студентом Кембриджского университета, и написал свое первое научное сочинение, в котором исследовал движение жидкости на плоскости. Впоследствии он много занимался гидродинамикой вязкой жидкости (уравнение Навье—Стокса), теорией упругости, «чистой» математикой (его имя носит важная теорема в математическом анализе), а также различными прикладными исследованиями. Историки науки считают его одним из основателей современной гидродинамики. В своей работе «О колебательных волнах» (1847 г.) он

*) Хауз Д. Гринвичское время: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983.

**) Уайт А. Планета Плутон: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983.

подходит к наблюдениям Рассела с бóльшей осторожностью чем Эри, но и его заключение гласит, что волны не могут сохранять постоянную форму даже в случае пренебрежимо малой вязкости. Иными словами, уединенная волна должна была бы распадаться и в том случае, если бы не теряла энергию на трение.

А все-таки она существует!

После этой уничтожающей критики об уединенной волне надолго забыли все, кроме самого Рассела. Мысли его постоянно возвращаются к ней. Приближаясь к старости, он напишет: «Это самое прекрасное и необычайное явление; день, когда я впервые увидел его, был лучшим днем моей жизни. Никому никогда не посчастливилось наблюдать его раньше или, во всяком случае, понять, что оно значит. Теперь оно известно как уединенная волна трансляции. Никто прежде и вообразить не мог, что уединенная волна возможна. Когда я описал ее сэру Джону Гершелю, он сказал: «Это просто вырезанная половина обычной волны». Но это не так, поскольку обычные волны идут отчасти выше, а отчасти ниже поверхности воды; кроме того, ее форма совсем иная. Это не половина волны, а, несомненно, вся волна целиком, с тем отличием, что волна как целое не находится попеременно то ниже, то выше поверхности, а всегда выше ее. Этого вполне достаточно, чтобы такой холм воды не стоял на месте, а двигался».

Итоги размышлений Рассела об уединенной волне были опубликованы в вышедшей уже после его смерти книге «Волны трансляции в океанах воды, воздуха и эфира», которая осталась незамеченной.

..взять хотя бы «Грейт Истерн», размеры и мощь которого, кажется, лежат за пределами человеческого воображения...

М. Фарадей

Я мальчиком мечтал, читая Жюль Верна,
Что тени вымысла плоть обретут для нас,
Что поплывет судно громадней Грит-Истерна,
Что полюс покорит упрямый Гаттерас.

В. Брюсов

Исследования различных видов волн, образующихся при движении судна, позволили Расселу обосновать новый подход к постройке кораблей, основанный на выборе таких обводов, которые позволяют судну тратить меньше энергии на создание волн. Результатом этого явилось его участие в разработке проекта и постройке крупнейшего паро-

хода того времени «Грейт Истерн» («Великий Восточный»). Работа его над проектом началась в 1853 г., а постройка после ряда неудач и несчастий была закончена в 1854 г. Это судно в 1860 г. совершало регулярные рейсы в Индию, а в 1865—1866 гг. с него была проложена кабельная телеграфная линия через Атлантический океан. Огромные размеры (207 м в длину и 25 м в ширину) и мощность двигателей (две паровые машины общей мощностью около 8 тыс. л. с.) поражали воображение современников. Корпус корабля был железный, помимо винтов он был снабжен двумя боковыми колесами и шестимачтовой парусной оснасткой. О качестве



Джон Скотт Рассел
(1808—1882)

проекта специалисты говорили в конце века, что если бы потребовалось построить новый «Грейт Истерн», то пришлось бы в точности следовать системе конструирования, разработанной Расселом. Помимо этого, современники знали Рассела как выдающегося инженера-изобретателя и одного из главных основателей Института кораблестроения. Он опубликовал около пятидесяти работ, большая часть которых связана с кораблестроением, волнами, паровыми двигателями, в том числе и книгу «Современная система кораблестроения».

Реабилитация уединенной волны

Еще при жизни Рассела ученые молодого поколения Жозеф Валентин де Буссинеск (1842—1929) и его сверстник лорд Рэлей, учившийся, между прочим, у Стокса, сумели найти приближенное математическое описание формы и скорости уединенной волны на мелкой воде. Позже появились еще две-три математические работы об уединенной волне, а также были повторены и подтверждены опыты Рассела. Казалось, все стало ясно. Тем не менее споры о существовании уединенной волны в узком кругу специалистов не прекращались — слишком велик был авторитет Эри и Стокса.

Наибольшую ясность в эту проблему внесли голландские ученые Дидерик Иоханнес Кортевег (1848—1941) и его ученик

Густав де Фриз*), которые в 1895 г. нашли уравнение, наиболее точно описывающее основные эффекты, наблюдавшиеся Расселом. Обобщив метод Рэлея, они получили довольно простое уравнение для волн на мелкой воде и нашли его

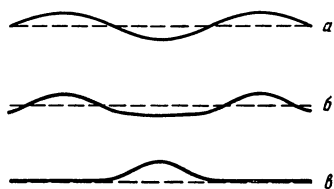


Рис. 2.2

периодические волновые решения. Эти волны, как и волны Герстнера, имеют несинусоидальную форму и становятся приблизительно синусоидальными только, если их амплитуда очень мала (рис. 2.2, а). При увеличении длины волны они приобретают вид далеко раздвинутых друг от друга горбиков (рис. 2.2, б), а при очень большой длине волны (в пределе, бесконечно большой) остается один горбик, который и соответствует уединенной волне (рис. 2.2, в). Волны, изображенные на рис. 2.2, б, можно наблюдать на отмелях, пока их вершинка не начинает деформироваться и они не опрокидываются. Форму волн Кортевега и де Фриза нельзя описать так просто, как форму волны Герстнера, ее можно представить только с помощью так называемых эллиптических функций, открытых Абелем и изученных другими выдающимися математиками, в особенности Карлом Якоби (1804—1851), братом известного петербургского академика Бориса Семеновича Якоби (1801—1874).

Уравнение Кортевега—де Фриза называют теперь КдФ-уравнением, и ему суждено было сыграть большую роль во втором рождении солитона в наше время. Для физиков оно важно тем, что с его помощью можно описывать не только волны на мелкой воде, но и многие другие волны. Для математиков оно послужило стартовой площадкой при построении глубокой и важной математической теории. Для «собственно математиков» история солитона начинается с КдФ-уравнения. Не забудем, однако, что они в свое время не сумели разглядеть глубин, таящихся в уравнении мелкой воды, и основательно забытая работа Кортевега и де Фриза вернулась к новой жизни лишь через 70 лет в основном усилиями физиков. Авторы не подозревали, конечно, о судьбе, уготованной их уравнению. Они просто честно разобрались

*) Кортевег прожил долгую жизнь и был достаточно известным ученым, однако о его главном достижении — КдФ-уравнении — при его жизни почти никто не вспоминал. Де Фриз был школьным учителем, и о его жизни нам ничего не известно.

в том, что сделали до них другие, выяснили кто прав, кто неправ и почему, и изложили все так, чтобы каждый, кто обратится к этой проблеме, мог бы разобраться в сути дела и в вычислениях. Короче говоря, они сделали все, что могли, но тем не менее и после этого уединенная волна... ушла в уединение дальних углов научных библиотек.

Изредка новые поколения ученых, занимавшихся проблемами гидродинамики, возвращались к обсуждению КдФ-уравнения и уединенных волн. Такие вспышки интереса наблюдались около 1925 г. и после 1945 г. В 1946 г. Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900—1980) дал первое математически строгое доказательство существования уединенной волны. Это доказательство было очень сложным, более простое нашел американский математик Курт Фридрихс в 1954 г. Примерно в то же время были проделаны тщательные опыты с уединенными волнами, в которых использовалась киносъемка. Эти достижения остались известными лишь узкому кругу специалистов.

Изоляция уединенной волны

То, что уединенные волны оказались на каких-то чердаках огромного здания науки, на самом деле можно понять. Действительно, чем волны на воде отличаются от хорошо изученных световых волн, радиоволн или волн, с помощью которых описывают квантовые явления? Все эти волны можно складывать — вспомним принцип Гюйгенса или объяснение интерференции и дифракции волн. При наложении двух волн возникает волна, форма которой определяется простым алгебраическим (или векторным) сложением двух исходных волн. С этим свойством световых волн в сущности и была связана победа волновой теории света, описанная выше. Это свойство волн лежит в основе радиосвязи и телевидения, а в квантовой теории возможность складывать волны заложена в фундамент всей теории. На математическом языке все это вытекает из линейности описывающих эти волны уравнений. К одному решению можно добавить другое и получить новое решение. Если увеличить или уменьшить амплитуду некоторого решения (умножить ее на число), то также получим новое решение.

Для волн в жидкости это неверно, складывать можно лишь волны очень малой амплитуды. Но если мы попытаемся сложить волны Герстнера или волны КдФ, то не получим не только новой волны Герстнера или КдФ, но и вообще волны, которая могла бы существовать. На математическом языке это означает, что уравнения гидродинамики *нелинейны*.

Конечно, свойство линейности звуковых, световых и радиоволн лишь приближенное. При распространении в среде волн с большой амплитудой это свойство нарушается. Например, в акустике давно было известно, что так называемые ударные волны сильно отличаются от обычных. Одним из первых это подметил Рассел. В своей книге он замечает, что звук пушечного выстрела (ударная волна) распространяется значительно быстрее, чем команда открыть огонь. Нелинейные эффекты в оптике также возможны, но их начали серьезно изучать лишь после того, как были созданы лазеры.

В общем, время от времени отдельные нелинейные взаимодействия волн в акустике, оптике и радиофизике рассматривались, однако их настоящее исследование началось лишь в середине нашего столетия. Тогда же появились «нелинейная оптика», «нелинейная акустика», «нелинейная радиофизика» и другие «нелинейные науки». «Исконно нелинейная» гидродинамика, в которой нелинейность проявляется уже в самых простых явлениях, в течение почти столетия развивалась в полной изоляции от «линейной» физики. Неудивительно, что ничего похожего на уединенную волну Рассела в других волновых явлениях никто не искал и не увидел. До тех пор пока линейность считали одним из основных свойств волновых явлений, уединенной волне, само существование которой обусловлено нелинейностью, суждено было слыть любопытным, но экзотическим явлением, интересным лишь для специалистов по гидродинамике.

Волна или частица?

Роковую роль в судьбе уединенной волны сыграло также еще одно обстоятельство. Ни Рассел, ни ученые, изучавшие уединенную волну в течение последующих 120 лет, не замечали ее необыкновенного сходства с частицей. Мы уже обратили внимание на наблюдение Расселом двух уединенных волн, которые после столкновения полностью сохраняют форму и скорость движения. Правда, частицы эти довольно своеобразные — еще Рассел заметил, что *«бóльшая» частица (высокая волна) всегда движется быстрее.*

Более тонкое явление, которого он не увидел, состоит в следующем. Когда высокая волна догоняет низкую, на первый взгляд кажется, что она проходит через нее и идет дальше, подобно тому как мелкие волны от брошенного камня проходят друг через друга. Если бы у Рассела был киноаппарат, он мог бы увидеть, что на самом деле в случае уединенных волн все происходит не так. Когда обе волны

соприкасаются, большая замедляется и уменьшается, а малая, наоборот, ускоряется и растет. Когда малая вырастает до размера большой, а большая соответственно уменьшается, то волны отрываются друг от друга, и далее бывшая малая уходит вперед, а бывшая большая отстает. Как видно из рис. 2.3, после такого взаимодействия *большая волна как бы «сдвигается» вперед, т. е. уходит немного дальше того положения, которое она занимала бы, если бы никакого взаимодействия не было, а малая, наоборот, отстает, «сдвигается» назад* (положения невзаимодействующих равномерно движущихся волн изображены на рисунке штриховыми линиями). Таким образом, волны вовсе не проходят свободно друг через друга! Они как бы сталкиваются и отталкиваются друг от друга подобно теннисным мячам.

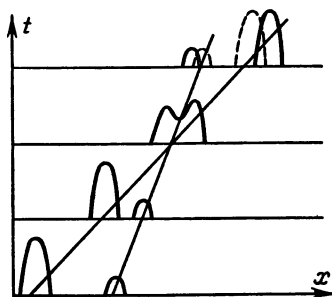


Рис. 2.3

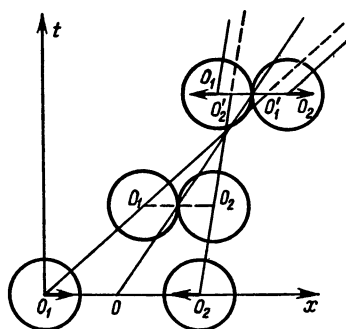


Рис. 2.4

Аналогия с теннисными мячами позволяет понять и только что описанный «сдвиг» уединенных волн при столкновении, который никак нельзя объяснить, если считать, что они свободно проходят друг через друга. Для описания столкновения двух равномерно летящих (без вращения) по одной прямой мячей удобно представить себе сначала их относительное движение (рис. 2.4). Если скорость левого мяча v_1 , а скорость правого v_2 , то точка O , расположенная посередине между их центрами O_1 и O_2 , движется с постоянной скоростью $V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Точка O , конечно, представляет собой центр тяжести (точнее, *центр масс*) мячей, который сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения, если на мячи не действуют внешние силы. Пока мячи не соприкасаются, точка O_1 движется относительно точки O со скоростью $v = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, а O_2 — со скоростью $-v$. В момент соприкосновения $t = t_0$ мячи начинают сминаться, а их центр масс

продолжает двигаться со скоростью V . Через небольшой промежуток времени $\frac{1}{2}(t'_0 - t_0)$ относительное движение мячей прекращается, и они начинают отталкиваться друг от друга. Таким образом, в момент $\frac{1}{2}(t'_0 + t_0)$ вся кинетическая энергия относительного движения перешла в потенциальную энергию сжатой резины, и «центры» мячей O_1 и O_2 движутся в этот момент с одинаковой скоростью V . За время $\frac{1}{2}(t'_0 - t_0)$ мячи принимают прежнюю форму. Если пренебречь потерями энергии на разогрев мячей и энергией остаточных колебаний резины, то в момент t'_0 они вновь будут двигаться относительно центра масс O со скоростями $-v$ и v . После удара направление относительного движения просто изменится на противоположное, так что теперь O_1 движется со скоростью $V - v = v_2$, а O_2 — со скоростью $V + v = v_1$.

Итак, мячи не просто обменялись скоростями, но и, сверх того, как ясно видно на рисунке, центр O_2 теперь несколько опережает точку O'_1 , в которой находился бы первый мяч если бы столкновения не было, а O_1 несколько отстает от O'_2 . Такой сдвиг всегда происходит, если время взаимодействия мячей $t'_0 - t_0$ достаточно мало. Читатель может сам убедиться, что при достаточно большом времени взаимодействия O_2 , наоборот, отстанет от O'_1 , а O_1 опередит O'_2 . Немного труднее найти то значение времени взаимодействия, при котором O_2 совпадает с O'_1 , а O_1 — с O'_2 (ответ: $t'_0 - t_0 = 4R/(v_1 - v_2)$, R — радиус мячей). Интересно также найти $O_2 - O'_1 = O'_2 - O_1$ при известных значениях $v_1, v_2, t'_0 - t_0$ (ответ: $2R - \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(t'_0 - t_0)$).

Эффект ускорения и отставания становится тем более заметен, чем больше размер мячей и меньше их относительная скорость (здесь, конечно, предполагается, что время взаимодействия $t'_0 - t_0$ не очень сильно зависит от относительной скорости). Такую же зависимость от относительной скорости можно наблюдать и во взаимодействии уединенных волн. Конечно, она сложнее, так как уединенная волна не имеет резкой границы и отличается от мяча и в других отношениях.

Аналогию можно сделать еще более наглядной, если изображать мячи прямоугольниками, высота которых увеличивается пропорционально кинетической энергии. Тогда их столкновение будет выглядеть совсем похожим на столкновение солитонов. Позже мы познакомимся с другими уединенными волнами, форма которых не зависит от скорости и которые еще больше похожи на частицы.

Почему же все-таки так долго никто не замечал этого самого, удивительного свойства уединенной волны? Понятно, что Рассел мог не увидеть этого, хотя, учитывая его необычай-

ную наблюдательность, это тоже как-то надо объяснить. Но ведь уже в 1952 г. была проделана целая серия опытов с уединенными волнами в современном варианте лотка братьев Веберов и с использованием киносъемки. С применением современной техники наблюдение столкновения уединенных волн и обнаружение описанных только что эффектов, казалось бы, не такое трудное дело! По-видимому, объяснение этой удивительной слепоты ученых может быть только одно — все, начиная с Рассела, упорно считали уединенную волну только волной, хотя и довольно необычной.

В какой-то степени в этом повинно и название «уединенная волна», подчеркивающее волновую природу явления. Поэтому, когда в 1965 г. американские ученые М. Крускал и Н. Забуски, изучая явления столкновений уединенных волн с помощью электронной вычислительной машины, ясно увидели, что уединенные волны во многом подобны частицам, они немедленно убрали слово «волна», а из «уединенной» (solitary) составили термин «солитон» (soliton), созвучный электрону, протону и другим названиям элементарных частиц *). Как «наблюдают» солитоны на вычислительных машинах в так называемых «численных экспериментах», будет сказано позже.

Глава 3

РОДСТВЕННИКИ СОЛИТОНА

Правильно в философии рассматривать сходство даже в вещах, далеко отстоящих друг от друга.

Аристотель

Пока уединенная волна понемногу начала выходить в свет, происходили другие события, связь которых с судьбой солитонов оставалась долгое время незамеченной. Речь идет о двух фундаментальных открытиях в далеких друг от друга областях естествознания — физиологии и гидродинамике. Хотя одно было чисто экспериментальным, а другое чисто теоретическим, сделал оба открытия один человек —

*) Первоначально солитон был назван «солитроном», по созвучию с электроном. Однако в последний момент стало известно о существовании некоей фирмы «Солитрон», и авторам пришлось убрать «р», чтобы не вступать с ней в тяжбу по поводу незаконного использования «торговой марки». Фирма давно прогорела, а солитон живет и здравствует!

Гельмгольц. Мы уже упоминали, что ему удалось измерить скорость распространения *нервного импульса*. В последовавших за этой основополагающей работой исследованиях была определена форма импульса и изучены многие детали механизма распространения импульсов в нервах. И только в наше время выяснилось, что *нервный импульс — это своеобразная уединенная волна*. Однако и сегодня еще нет окончательной, общепринятой теории явлений, происходящих в нервных волокнах живых существ при передаче по ним информации. В другой работе Гельмгольц обнаружил, что *вихри в воде*, описываемые уравнениями гидродинамики идеальной жидкости, должны обладать совершенно необычными свойствами, которые делают их похожими на частицы. Точнее, он обнаружил, что вихри в идеальной жидкости (т. е. несжимаемой и без трения) неразрушимы и взаимодействуют друг с другом подобно электрическим токам. Пользуясь современным языком, мы скажем, что *вихри — это солитоноподобные возбуждения*.

Герман Гельмгольц и нервный импульс

В ту пору физика еще не считалась в числе хлебных занятий. Отец объявил мне, что может помочь мне в изучении физики, ...если я возьму в придачу и медицину. Я был не против того, чтобы изучать живую природу, и охотно согласился.

Г. Гельмгольц

Так началось формирование великого естествоиспытателя прошлого века, оказавшего глубокое влияние на развитие мировой науки. Его открытия в физике, математике, физиологии, психологии и медицине были широко признаны не только на его родине, в Германии, но и в Англии, Франции и в других странах, в которых начала развиваться наука. Гельмгольц счастливо сочетал в своей научной деятельности достоинства немецкой, английской и французской научных школ, а его многочисленные ученики не только прославились своими научными достижениями, но и основали собственные научные школы в разных странах. Как писал А. Г. Столетов, «Гельмгольц дорог нам не только как гениальный ученый, — он в то же время самый заслуженный из современных насадителей науки вообще и, в частности, в нашем отечестве».

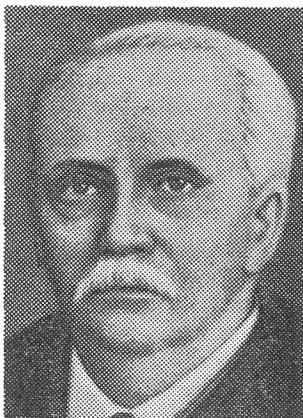
Достаточно сказать, что среди учеников Гельмгольца были Генрих Герц, Петр Николаевич Лебедев и Иван Михайлович Сеченов, глубоко почитавшие своего учителя. И. М. Сеченов нарисовал такой портрет Гельмгольца: «От его спокойной фигуры веяло каким-то миром, словно он не от мира сего... он производил на меня впечатление, подобное тому, какое я испытывал, глядя на Сикстинскую мадонну в Дрездене».

Это необыкновенное впечатление, производимое личностью Гельмгольца, было результатом огромной внутренней духовной работы, которая началась уже в детстве. Эта работа не была легкой и требовала могучей воли. Приходилось преодолевать и внутренние (слабое здоровье) и внешние (материальные) препятствия. Чтобы лучше представить себе все это, познакомимся немного с биографией Гельмгольца.

Родился он 31 августа 1821 г. в Потсдаме в семье школьного учителя. Его мать происходила из английской семьи, переселившейся в Германию, среди ее предков были и французы. Гельмголец горячо любил свою родину и гордился достижениями ее культуры, что не мешало ему высоко ценить и достижения других народов. Ему были чужды какие бы то ни было национальные предрассудки, от которых часто не были свободны даже выдающиеся ученые. Конечно, это немало способствовало тому, что к нему «тянулись» молодые энтузиасты науки из самых разных стран.

Все это, однако, пришло потом, а первые шаги были очень не легкими. Семидесятилетний Гельмголец вспоминал о своем детстве так: «Первые 7 лет я был болезненным мальчиком... рано обнаружился и некоторый недостаток в моем умственном складе: слабая память на вещи, не имеющие внутренней связи... мне было труднее чем другим запомнить вокабулы, неправильные грамматические формы, особенно обороты речи... Для меня было мукой учить наизусть статьи в прозе...» Зато какую несравненную радость доставило этому мальчику первое знакомство с математикой и физикой, в которых все внутренне связано! «С величайшим усердием и радостью набросился я на изучение всех физических учебников, какие находил в библиотеке отца». Эта страсть к физике определила дальнейшую судьбу Гельмгольца. Все его достижения в физиологии нервной системы, зрения и слуха так или иначе связаны с физикой.

К чести педагогов гимназии, они вполне сумели оценить способности юноши, особенно к физике и математике. Несмотря на трудности с «вокабулами», Гельмголец успешно закончил гимназический курс и поступил в Военно-медицинский институт в Берлине. Под влиянием выдающегося физиолога



Герман Гельмгольц
(1821 – 1894)

Иоганна Мюллера (1801—1858) он заинтересовался здесь гистологией и физиологией и в 1842 г. защитил диссертацию «О строении нервной системы беспозвоночных». В то время были известны нервные клетки и волокна, но как они связаны друг с другом, было неясно. Молодой Гельмгольц один из первых понял, что клетки и волокна соединены в единое целое — нейрон.

В 1843 г. Гельмгольц был назначен военным врачом в Потсдаме. В этот период он и создал свою знаменитую работу «О сохранении силы», о которой рассказано в гл. 1. Несмотря на то, что значение этой работы было понято немногими, она принесла ее автору достаточно широкую известность, и в 1849 г. он был приглашен в Кёнигсбергский университет профессором физиологии. Там он работал до 1855 г. и выполнил измерение скорости нервного импульса, о котором мы сейчас расскажем.

С этого времени Гельмгольц становится признанным ученым и отдает все силы науке. Растет и его слава. Его приглашают в Боннский университет, затем в Гейдельбергский. Признание его как физика, а не только как физиолога, пришло, когда ему одновременно предложили место профессора физики в Берлинском университете и кафедру экспериментальной физики в Кембридже. Гельмгольц не захотел покинуть Германию, и кафедру в Кембридже возглавил Максвелл. Последние годы жизни Гельмгольц, не оставляя собственные научные исследования, руководил Государственным физико-техническим институтом в Берлине. Умер он, всеми почитаемый, в родном Потсдаме 8 сентября 1894 г. За свою жизнь он успел сделать необычайно много. «Человек, вкладывающий в работу всю свою душу, всегда успевает больше...» (Максвелл).

Когда Гельмгольц в 1849 г. приступил к опытам по определению *скорости распространения нервных импульсов*, об их природе было известно довольно мало. Считалось, что они имеют электрическое происхождение и распространяются с огромной скоростью, недоступной прямому измерению.

Идея о том, что по нервам распространяется «животное электричество», была высказана Луиджи Гальвани еще в 1786 г. Однако после опытов Алессандро Вольты (1745—1827), убедивших всех, что никакого «животного электричества» нет, она была надолго оставлена и возродилась лишь к середине прошлого века. Особенно способствовал возрождению идей Гальвани сверстник и друг Гельмгольца, швейцарский физиолог Эмиль Дюбуа-Реймон (1818—1896), описавший свои опыты и давший им истолкование в обширном труде «Исследования

по животному электричеству» (1848 г.) *). Работы Дюбуа-Реймона и других показали, что в живых организмах действительно вырабатывается электричество и что распространение нервного возбуждения связано с передачей электрических сигналов. При этом нервное волокно стали считать как бы разновидностью электрических проводов. Под влиянием Дюбуа-Реймона этими идеями заинтересовался Гельмгольц; он решил выяснить, верно ли такое убеждение. Результат поставленного им опыта оказался ошеломляющим — скорость движения импульса по нерву лягушки оказалась отнюдь не «огромной» — всего 30 м/с ≈ 100 км/ч! Это показалось настолько невероятным, что сам Иоганн Мюллер не поверил любимому ученику и отказался послать его статью в научный журнал.

Насколько сильным было впечатление от этого опыта, можно судить по воспоминаниям И. М. Сеченова, слушавшего в 1857 г. лекции Дюбуа-Реймона: «Особенно памятны мне его лекции о быстроте распространения возбуждения по нервам. Тут он положительно увлекся и рассказал с жаром всю историю этого открытия: сомнения Мюллера... его собственные мысли... и, наконец, решение задачи его другом Гельмгольцем».

Дальнейшая судьба нервного импульса

Опытами Гельмгольца наивное представление о нервном волокне как электрическом проводе было опровергнуто. Однако предложить что-то лучшее было не так-то просто. Начались долгие и трудные поиски настоящего механизма распространения импульсов по нервам, на которые ушло около ста лет. С современными представлениями мы познакомимся в последней главе, а сейчас сделаем лишь несколько замечаний о дальнейшей истории нервного импульса.

Сам Гельмгольц полагал, что при движении импульса происходит перемещение каких-то материальных частиц, но ничего более ясного предложить не сумел. В 1868 г. молодой немецкий физиолог Юлий Бернштейн сумел определить форму импульса. Она оказалась колоколообразной, примерно как у солитона Рассела. Впоследствии выяснилось, что этот «колокол» движется всегда с одной и той же скоростью и имеет

*) Очень интересовался «животным электричеством» Фарадей: «Как ни удивительны электрические явления в неорганическом веществе, несравненно удивительнее электрические явления в нервной системе...»

приблизительно одну и ту же форму независимо от силы раздражения, породившего импульс.

В 1879 г. ученик Дюбуа-Реймона немецкий физиолог Лудигер Герман очень близко подошел к современным представлениям о математическом описании нервного импульса. Он уподобил его распространение горению бикфордова шнура. Для заданного шнура скорость и форма бегущей по нему уединенной волны горения, очевидно, постоянны (если m — количество пороха, сгорающего в единицу времени, а M — количество пороха в шнуре на единицу его длины, то скорость равна $v = m/M$; для бикфордова шнура обычно подбирают m и M так, что $v = 1$ см/с).

Позднее Герман предложил более реальную модель, уподобив нерв телефонному кабелю, в котором, однако, волны должны взаимодействовать нелинейно *). Решать подобные математические задачи в то время, однако, не умели, и даже сам Герман считал, что математическую теорию нервного импульса разработать невозможно.

Примерно в то же время, в начале нашего века, Бернштейн выдвинул близкую к современной физико-химическую теорию процессов, происходящих в нервном волокне (это так называемая «мембранная гипотеза», о которой будет рассказано в последней главе). Современники отнеслись к идеям Бернштейна довольно прохладно.

В общем, история нервного импульса разворачивалась примерно по такому же сценарию, как и история солитона Рассела. Раз в двадцать-тридцать лет делался заметный шаг вперед, но все происходило в узком кругу специалистов, и никто не замечал, что между нервным импульсом и уединенной волной Рассела существует глубокая связь.

Герман Гельмгольц и вихри

На долю Гельмгольца выпало указать весьма замечательные свойства вихревого движения... свойства вихревых колец подали сэр У. Томсону мысль о возможности построить новую форму атомистической теории...

Л. Больцман

Нервный импульс мало похож на частицу. Этим он, конечно, сильно отличается от солитона Рассела. На частицы гораздо более похожи вихри, и особенно вихревые кольца,

*) При прохождении импульса, как и при движении пламени, расходуется энергия, которую нужно восполнять, иначе новый импульс не пройдет. Тем более не может быть и речи о сложении волн горения. Две встречные волны пламени уничтожают друг друга, чем, как известно, пользуются для тушения степных и лесных пожаров.

удивительные свойства которых были открыты Гельмгольцем в 1858 г. С вихрями, как и с волнами, знаком всякий. В воде они возбуждаются так же легко, как волны — достаточно провести рукой по поверхности воды в ванне или закрутить ложкой чай в стакане. Каждый видел вихри, оставаемые веслами, и кольца табачного дыма. Возможно, кому-то встречались мощные атмосферные вихри — смерчи. В общем, что такое вихрь — объяснять не надо.

Наблюдения над вихрями и размышления об их удивительных свойствах, вероятно, побудили знаменитого французского философа и математика Рене Декарта (1596—1650) положить вихревое движение в основу объяснения всего наблю-

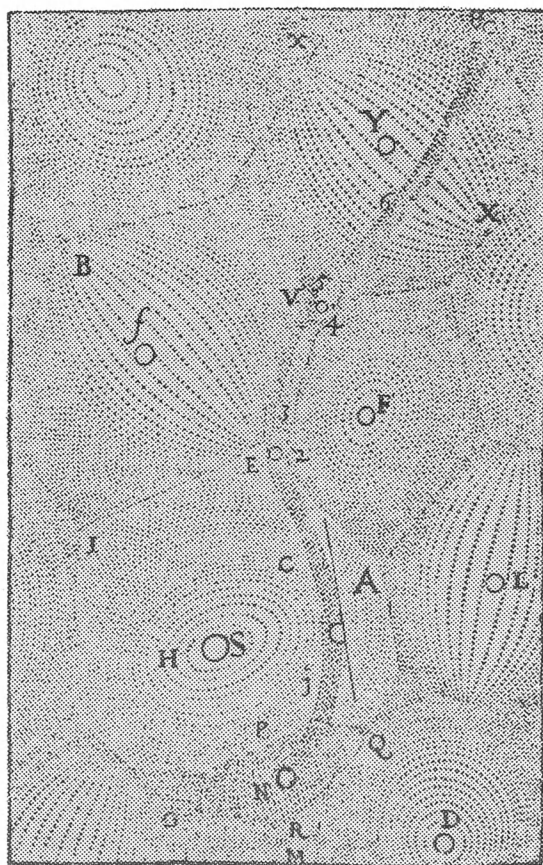


Рис. 3.1

даемого мира. В «Началах философии» он нарисовал картину Вселенной, пронизанной вихрями: «...предположим, что вся материя... разделена на части... что все они стали двигаться... двумя различными способами, а именно: каждая вокруг собственного средоточия, образовав жидкое тело, каковым я полагаю небо; кроме того, некоторые двигались совместно вокруг нескольких центров...» На рисунке из этого трактата (рис. 3.1) частицы в пространстве AEI вращаются вокруг своих осей, образуя малые вихри, а все вместе вращаются вокруг центра S и т. д. Заметим, что в виде некоего вихря, разбросавшего планеты, представлял себе Солнечную систему и Кеплер, а о вращательном («коловратном») движении мельчайших частиц вещества много размышлял Ломоносов.

Ньютон легко уловил непоследовательности и противоречия в декартовой картине мира, и она, правда, после довольно упорного сопротивления ее сторонников была оставлена. Однако отбросив полностью все идеи Декарта, Ньютон отбросил и важную мысль о близкодействии. У Декарта всякое возмущение передавалось в пространстве только от одного вихря к другому, и поэтому не могло быть и речи об абсолютно пустом пространстве или распространении каких бы то ни было взаимодействий с бесконечной скоростью.

Когда физики вернулись к волновой теории света, эфиру и электромагнитным волнам, возродились в более совершенном обличье и вихри Декарта. В 1861–1862 гг. Максвелл опубликовал несколько работ под общим названием «О физических силовых линиях», которой можно было бы дать подзаголовок «теория молекулярных вихрей и ее применение к электрическим, магнитным и световым явлениям». Другой великий физик, Людвиг Больцман (1844–1906), один из создателей современной кинетической теории вещества, написал впоследствии к этим работам обширный комментарий. В нем он говорит, что «...этот цикл принадлежит к наиболее интересному, что только знает история физики...»

Максвеллова вихревая модель изображена на рис. 3.2, взятом из его работы. «... AB представляет электрический ток... шестиугольники выше и ниже AB – вихри, а малые окружности, разделяющие их ... представляют электричество...» Когда идет ток, «колесики» на линии AB приводят во вращение вихри, те передают вращение через другие колесики дальше. Оси вихрей направлены по силовым линиям магнитного поля, а угловая скорость вращения вихря пропорциональна напряженности магнитного поля. С помощью этой модели Максвелл сумел получить уравнения, описывающие взаимодействие магнитного поля и токов и распространение электромагнит-

ного поля от точки к точке с конечной скоростью. Именно этот гениальный скачок мысли от грубой механической модели к тончайшей и абстрактной теории, видимо, и вызвал восхищение Больцмана, который сам очень любил строить простые модели для самых сложных физических явлений.

Максвелл, однако, не был удовлетворен достигнутым. Он неоднократно подчеркивает, что это всего лишь модель, и впоследствии пытался вывести свои уравнения другими, более абстрактными способами. Тем не менее он постоянно пользуется физическими аналогиями,

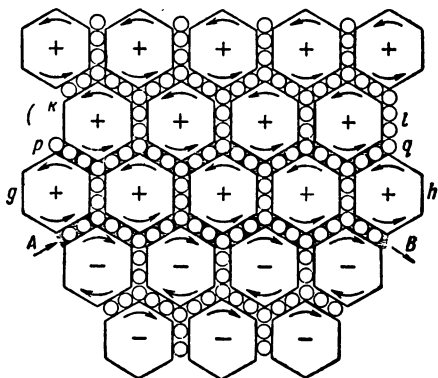


Рис. 3.2

стремясь к наглядному пониманию сложных электромагнитных явлений. Особенно часто он сравнивал электромагнитные процессы с вихревыми движениями жидкости. Статью Гельмгольца о вихрях он хорошо знал и часто цитировал.

Статья эта была напечатана в «Журнале чистой и прикладной математики», основанном в 1826 г. немецким инженером и математиком-любителем Августом Леопольдом Крелле. В журнале были опубликованы многие выдающиеся работы, в первых номерах журнала были напечатаны статьи Абеля, которого Крелле очень ценил и поддерживал. В статье Гельмгольца была разработана математическая теория вихрей в *несжимаемой, невязкой (без трения) жидкости*. Движения такой жидкости, обычно называемой *идеальной*, описываются уравнениями, выведенными Эйлером. Стокс первым ясно разделил движения жидкости на безвихревые и вихревые и подробно исследовал безвихревые движения. Гельмгольц поставил перед собой задачу понять законы движения и взаимодействия вихрей и сразу обнаружил удивительные явления.

Чтобы понять главные результаты Гельмгольца, нужно сначала уяснить себе, что такое *вихревое движение* и *вихри*. Вихри, которые легко создать в воде движением руки, живут очень недолго и за ними трудно наблюдать. Понаблюдаем поэтому за вихрем, который образуется в ванне, когда мы выпускаем из нее воду. Наполним ванну, подождем, чтобы движения в воде успокоились, и осторожно вынем пробку, положив на поверхность воды над отверстием несколько

коротких кусочков спичек. Если образуются вихри, то мы увидим, что спички будут двигаться по-разному. Одна, расположенная в центре вихря, быстро вращается вокруг своей оси («вокруг собственного средоточия»), а остальные вращаются совместно вокруг первой. Движение далеких спичек не связано с вращением вокруг «собственного средоточия». В центре вихря движение вихревое, а там, где спички не вращаются вокруг своей оси, оно безвихревое. Через некоторое время можно увидеть, что от середины вихря протягивается тонкая ножка и образуется воронка. Пока не образовалась воронка, мы имеем возможность наблюдать одиночный вихрь. Его ось вращения Гельмгольц назвал *вихревой линией*. Этот и другие вихри в воде живут недолго. Если закрыть отверстие в ванне, то вихрь быстро исчезнет.

Поведение идеальной жидкости, однако, разительно отличается от наблюдаемых движений воды. Гельмгольц доказал, что *вихри в идеальной жидкости не могут исчезать или возникать*. В воде они возникают только за счет того, что между соседними частицами жидкости существует трение (вязкость), посредством которого вращение одной частицы передается другой (вспомните модель Максвелла!). Он также доказал, что вихревая линия не может оканчиваться внутри жидкости, т. е. она либо замкнута, либо оканчивается на поверхности или на дне и стенках. Если жидкость движется как целое, то вихрь уносится, как лодка, общим потоком. Однако если нет других вихрей, то его центр остается неподвижным относительно окружающей воды.

Очень интересно *взаимодействие двух вихрей*. Если вихри вращаются в одном направлении, то они движутся по окружностям вокруг общего центра O , расположенного между ними, как показано на рис. 3.3. Если они вращаются в противоположных направлениях, то центр вращения находится вне отрезка O_1O_2 . Особенно интересен случай, когда оба вихря вращаются в противоположных направлениях, но в остальном совершенно одинаковы. Тогда оба вихря движутся по прямой, составляя как бы одно целое (скорости v_1 и v_2 становятся одинаковыми, и точка O уходит в бесконечность). Все частицы жидкости внутри некоторого овала движутся относительно остальной части жидкости с постоянной скоростью (см. рис. 3.4). В системе, относительно которой этот овал покоится, жидкость обтекает его, как она обтекала бы твердое тело в форме этого овала. Это замечательное явление было подробно изучено в работе Кельвина «О вихревом движении» (1869 г.), и мы будем называть эту похожую на частицу пару вихрей *овалом Кельвина*.

Наблюдать пару вихрей в воде не очень легко, но проявив некоторое терпение, можно увидеть их, возбуждая вихри в ванне плавным движением перевернутого ковшика (глубоко погружать его не надо). Следить за вихрями легче всего по их теням на дне, нужно только удачное освещение сверху.

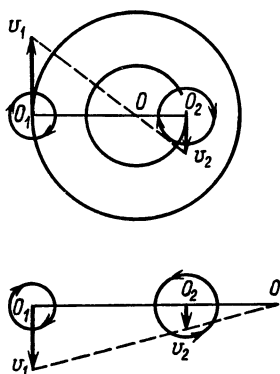


Рис. 3.3

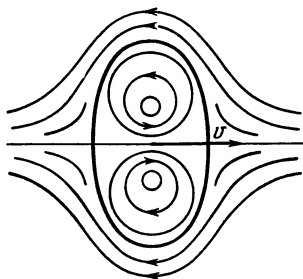


Рис. 3.4

Овал, конечно, увидеть не удастся, но пара вихрей выделяется достаточно четко по их совместному движению. Заметим, что на мелкой воде вихри быстро затухают, а на более глубокой воде наблюдается на самом деле не пара независимых вихрей, а две воронки одного вихря, изогнутого дугой (см. рис. 3.5). Увидеть такую структуру пары вихрей довольно трудно (попробуйте!), но кольцевые вихри наблюдать очень легко.

Кольцевые вихри (или *вихревые кольца*) тоже изучил Гельмгольц, и он же описал простые опыты, в которых можно их наблюдать.

Подробное описание опытов Гельмгольца и их усовершенствованных вариантов есть в книге «Опыты в домашней лаборатории» (М.: Наука, 1980. — Библиотечка «Квант», вып. 4). Самое интересное явление — взаимодействие двух колец. Если в идеальной жидкости два одинаковых вихревых кольца движутся вдоль общей оси OO' в одном и том же направлении с одинаковыми скоростями, то они начинают притягиваться (рис. 3.6, а). При этом кольцо 1 расширяется и замедляет движение, а кольцо 2 сжимается, ускоряется и проскакивает через кольцо 1 (рис. 3.6, б). Как только это произойдет, кольцо 2 начинает расширяться и замедляться, а кольцо 1 — сужаться и ускоряться. Когда их размеры и

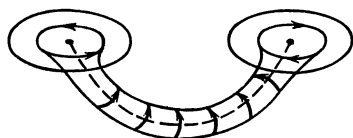


Рис. 3.5

скорости сравниваются (рис. 3.6, в), вся игра повторяется (рис. 3.6, г), и так до бесконечности.

Такую картину взаимодействия колец Гельмгольца и Кельвин получили чисто теоретически, исходя из основных уравнений

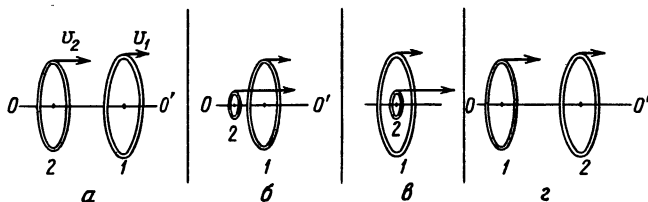


Рис. 3.6

гидродинамики идеальной жидкости. Гораздо труднее найти таким способом, что произойдет при взаимодействии колец, движущихся в разных направлениях. Подобные задачи начали исследоваться с помощью численных расчетов на больших ЭВМ лишь совсем недавно. Эти исследования подтвердили, что вихри и кольца во многом похожи на частицы. Еще раз подчеркнем, что частицы эти довольно необычные, и механика их отличается от ньютоновской. Первый закон Ньютона для вихрей изменяется. Изолированный вихрь всегда покоится относительно среды, а овал Кельвина или кольцо Гельмгольца движутся равномерно и прямолинейно, в покое они находиться не могут. Взаимодействие двух вихрей также не похоже на взаимодействие обычных точечных частиц, но взаимодействие пар вихрей или вихревых колец можно описывать на языке механики деформируемых частиц конечного размера. Эта аналогия не хуже и не лучше, чем описанная выше аналогия уединенных волн Рассела упругим мячам.

«Вихревые атомы» Кельвина

То, что вихри похожи на частицы, было ясно уже Кельвину. Именно это их свойство позволило предложить любопытную модель *вихревых атомов*. Представим себе, что Вселенная заполнена эфиром, который во всем подобен идеальной жидкости. Если при рождении Вселенной образовалось какое-то количество вихревых колец, то они, согласно Гельмгольцу, будут сохраняться, взаимодействуя, как было описано выше. Для того чтобы объяснить существование атомов различных типов, Кельвин рассматривал замкнутые вихревые линии с разным числом узлов (рис. 3.7). Атомы Кельвина не удалось связать с какими-либо реальными

частицами, да и сам Кельвин, похоже, не пытался это сделать. Его теория была надолго забыта, а после того как из физики было изгнано понятие эфира, казалось, что любые подобные теории совершенно бессмысленны. Тем не менее почти через сто лет стали появляться модели элементарных частиц, близкие по духу к теории Кельвина, с которой их роднит представление об элементарных частицах как о солитонах. Можно сказать, что Кельвин первый попытался построить *солитонную модель элементарных частиц*, и в этом смысле его идея оказалась, очень живучей *).

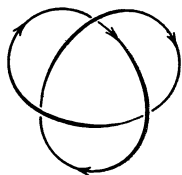


Рис. 3.7

В речи, посвященной 300-летию со дня рождения Декарта, замечательный русский физик Николай Алексеевич Умов (1846–1915) сказал: «Возможно, что в мире мысли, как и в материальной природе, нет произвольного зарождения, а существует только развитие, эволюция; что современная мысль возникает на неосознаваемом фоне идей, переданных нам предшествующими поколениями». История идей, связанных с солитоном, вполне подтверждает эту гипотезу.

Лорд Росс и вихри в космосе

В то самое время, когда создавалась теория вихрей, человеку впервые удалось увидеть вихри в космосе. Увидел их в 1848 г. астроном-любитель Уильям Парсонс (лорд Росс, 1800–1867). Он построил самый большой в то время телескоп-рефлектор длиной около 18 м с металлическим зеркалом диаметром 182 см. Размеры этого телескопа производили огромное впечатление. Еще большее впечатление произвели результаты сделанного на нем наблюдения *спиральной структуры* туманности M51 в созвездии Гончих Псов (см. рис. 3.8). В последовавших за этим открытием многолетних наблюдениях Росса и других астрономов выяснилось, что подобную структуру имеют многие туманности.

Теперь мы знаем, что туманности — это гигантские галактики, состоящие из огромного числа звезд, межзвездной пыли и газа. Большинство галактик, в том числе и наша

*) Наиболее интересная особенность модели Кельвина — объяснение отличий атомов друг от друга чисто топологическими различиями вихревых нитей. (Об основных топологических понятиях см. книгу: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — Библиотечка «Квант», вып. 21.)

Галактика, имеют спиральную структуру и подобны гигантским вихрям. Идея о вращении туманностей и сходстве их с вихрями в воде, стекающей в отверстие, не ускользнула, конечно, от внимания первооткрывателя, но показалась ему чересчур смелой: «В настоящее время было бы бессмысленным гадать о динамическом состоянии подобных систем...

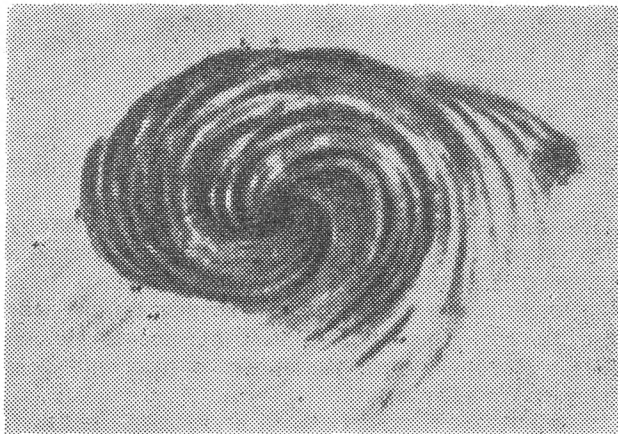


Рис. 3.8

Их сходство с предметами, плывущими в водовороте, разумеется, должно дать толчок воображению, хотя существование там соответствующих условий невозможно. Еще более соблазнительная гипотеза может родиться, если рассмотреть орбитальное движение в сопротивляющейся среде, но все такие догадки ведут в тупик».

На самом деле они привели не в тупик, а к увлекательной новой науке, объясняющей рождение звезд. Те, кого интересуют история открытия галактик и их структуры, с удовольствием прочтут увлекательную книгу «Открытие нашей Галактики»*), а с современным развитием *вихревой космогонии* можно познакомиться по более трудной книге «Происхождение галактик и звезд»**). История открытия спиральной структуры галактик очень интересна сама по себе и полна неожиданных открытий, недоразумений, тупиков —

*) Уитни Ч. Открытие нашей Галактики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.

**) Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. Происхождение галактик и звезд. — М.: Наука, 1983.

всего того, с чем мы уже встретились в истории солитона. Судьба всякой глубокой идеи в науке обычно не проста, и история солитона не представляет исключения, а очень наглядно показывает, на каком извилистом пути добываются крупницы научного знания. До сих пор мы были скорее зрителями, чем участниками этой нелегкой работы. Теперь попробуем исследовать несколько тропинок, проявляя некоторую самостоятельность.

О линейности и нелинейности

Прежде чем приступить к этой работе, еще раз обдумаем, что мы уже узнали о солитонах. В самых разных средах могут существовать и распространяться локализованные (т. е. сосредоточенные в ограниченной части пространства; от лат. *locus* – место) возбуждения, которые похожи на своеобразные деформируемые частицы. В научной литературе обычно употребляют для этих частиц названия «*уединенная волна*» или «*солитон*», причем солитонами обычно (особенно математики) называют уединенные волны, которые сохраняют свою индивидуальность при столкновении и описываются решениями некоторых специальных уравнений, подобных КдФ-уравнению. Мы позволим себе, как это делает большинство физиков, отклониться от этого правила и зачастую называть солитонами всякие локализованные возбуждения, похожие на частицы (термин «солитоноподобное возбуждение» звучит слишком неуклюже, и мы его будем по возможности избегать). Это не приведет к недоразумениям, если идет речь о свойствах, общих для всех солитоноподобных возбуждений, а конкретные солитоны можно называть их индивидуальными именами.

Мы познакомились с солитонами трех типов. Они были открыты примерно в одно и то же время, но судьбы их складывались по-разному, а главное, в течение целого столетия никак не скрещивались. В большой мере это связано с тем, что для их правильного понимания необходимо было освободиться от представлений о линейности соответствующих им возбуждений. Принцип сложения возбуждений позволил разработать настолько общие и эффективные методы решения многочисленных задач физики, что многие стали сознательно или бессознательно считать его одним из основных принципов математической физики*). Отсюда возникло

*) Как мы уже говорили, «досадным» исключением оставалась лишь гидродинамика.

стремление хотя бы приближенно «линеаризовать» каждую физическую задачу, т. е. свести ее к такой, для которой в первом приближении принцип сложения выполняется. К нелинейным задачам не было никакого общего подхода, а потому и не могла возникнуть общая теория солитонов, которые по своей природе нелинейны. В некоторых счастливых случаях удавалось изучить конкретные нелинейные явления, такие как волны Герстнера, КдФ-солитоны или простые гидродинамические вихри, но общую атмосферу это изменить не могло.

Почему линейность так упрощает решение задачи? Проще всего это понять на простых примерах. Рассмотрим уравнение $ax + y = 0$, решения которого — это пары чисел (x, y) , при подстановке которых оно обращается в тождество. Ясно, что всякое решение можно записать в виде $(x_0, -ax_0)$, где x_0 — произвольное число. Если изобразить решения точками на плоскости, то все решения лежат на прямой OA , проходящей через точки $O = (0, 0)$ и $A = (1, -a)$. Если мы знаем только одно решение A , то, пользуясь линейностью, можно получить все решения умножением на произвольное число: $x_0 A = (x_0, -ax_0)$. Математик скажет, что совокупность всех решений этого уравнения образует *линейное одномерное многообразие*. Для определения всех его точек достаточно задать одну точку, отличную от $O(0, 0)$, например, $A = (1, -a)$. Если $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ — две точки этого многообразия, то точка $A_3 = c_1 A_1 + c_2 A_2 = (c_1 x_1 + c_2 x_2, c_1 y_1 + c_2 y_2)$ при любых c_1 и c_2 тоже принадлежит этому многообразию (т. е. точка A_3 тоже лежит на прямой OA).

Точно так же можно найти все решения уравнения $ax + by + z = 0$, т. е. тройки чисел (x, y, z) , при подстановке которых уравнение обращается в тождество. Можно убедиться, что достаточно знать два решения, например, $A_1 = (1, 0, -a)$ и $A_2 = (0, 1, -b)$, а все остальные получаются их *линейными комбинациями*, т. е. $c_1 A_1 + c_2 A_2 = (c_1, c_2, -(c_1 a + c_2 b))$. Это — пример *двумерного линейного многообразия*. Геометрически можно изобразить его как плоскость в трехмерном пространстве (попробуйте проверить эти утверждения и нарисовать такую плоскость).

Рассмотрим теперь более близкий к физике пример колебаний грузика на пружине. Отклонение грузика от положения равновесия $x(t)$ подчиняется уравнению Ньютона $a(t) = -\omega_0^2 x$, где $a(t)$ — ускорение грузика в момент t , ω_0 — круговая частота, $\omega_0 = 2\pi/T$, а T — период колебаний грузика. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения этого уравнения, описывающие какие-то два движения, то и любая их *линейная комбинация* $x_3(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ — тоже решение (т. е. $x_3(t)$ — возмож-

ное движение)*). Совокупность всех решений также образует линейное многообразие.

Рассмотрим два движения: $x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ и $x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$. Взяв $c_1 = x_M \cos \varphi$, $c_2 = -x_M \sin \varphi$, можно написать произвольную линейную комбинацию из x_1 и x_2 :

$$x_M \cos \varphi \cdot \cos(\omega_0 t) - x_M \sin \varphi \cdot \sin(\omega_0 t) = x_M \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Так получается самое общее выражение для отклонений грузика при колебаниях с амплитудой x_M и фазой φ . По аналогии с рассмотренными нами алгебраическими уравнениями можно сказать, что линейное многообразие возможных колебаний двумерно. Каждое колебание грузика можно представить точкой на плоскости (c_1 , c_2), и эти точки также образуют линейное многообразие.

Над этими простыми примерами стоит как следует подумать. Важно понять, во-первых, что любое колебание грузика можно представить в виде суммы двух *линейно независимых*, т. е. не выражающихся друг через друга в виде линейных комбинаций колебаний $x_1 = \cos(\omega_0 t)$ и $x_2 = \sin(\omega_0 t)$ (вместо этих можно взять и другие линейно независимые решения). Наоборот, пусть известны два возможных колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$, отношение которых не постоянно, — такие колебания будут *линейно независимыми*. Тогда любое другое движение можно получить, подобрав подходящие числа c_1 и c_2 и складывая колебание $c_1 x_1(t)$ с $c_2 x_2(t)$. Важно, что при этом не нужно знать даже само уравнение. Достаточно иметь два независимых колебания и знать, что выполнен принцип линейности, или принцип сложения колебаний.

Если линейности нет, то все выглядит гораздо сложнее. Возьмем самое простое уравнение $y^2 + ax^2 = 0$. Сразу ясно, что многообразие решений (x , y) будет иметь совершенно разный вид при разных знаках a . При $a > 0$ оно состоит из единственной точки $O = (0, 0)$. При $a = 0$ — это точки, лежащие на оси Ox , т. е. точки $(x_0, 0)$, где x_0 — любое число. Если же $a < 0$, то все решения имеют вид или $(x_0, x_0 \sqrt{-a})$, или $(x_0, -x_0 \sqrt{-a})$, т. е. лежат либо на прямой OA , либо на прямой OB (рис. 3.9). Ясно, что в этом случае многообразие решений нелинейно. Например, сумма двух написанных решений с одним и тем же x_0 равна $(2x_0, 0)$, а $x = 2x_0$, $y = 0$ не удовлетворяет нашему уравнению при $x_0 \neq 0$.

Так обстоит дело в самом простом случае. При усложнении уравнения уже совсем не просто выяснить, имеет ли

*) Так как ускорение $a(t)$ линейно зависит от $x(t)$.

оно решения, и если имеет, то сколько, и как эти решения зависят от параметров, входящих в уравнения. В нашей простой задачке единственный параметр — это число a . При $a > 0$ есть только нулевое решение, при $a = 0$ решения обра-

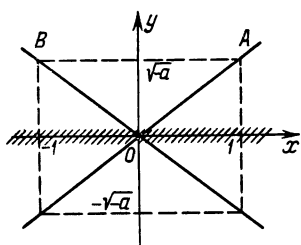


Рис. 3.9

зуют линейное многообразие, а при $a < 0$ многообразие решений становится нелинейным. В этом примере нелинейное многообразие устроено слишком просто, но небольшое изменение уравнения (скажем, добавка к левой части слагаемого $b x$, где число b может быть очень малым) приводит к очень серьезным, качественным изменениям структуры множества решений (убедитесь в этом!).

Вообще такая сильная, качественная зависимость решений от параметров, появление новых решений (или их исчезновение) — самое характерное свойство нелинейных уравнений. С простыми примерами такого проявления нелинейности в движениях тел мы сталкиваемся очень часто. Когда мы пытаемся сдвинуть с места стоящий на ровном месте автомобиль, мы постепенно увеличиваем усилие, но автомобиль не двигается, пока усилие не достигнет определенного значения. После того как автомобиль начнет двигаться, его довольно легко разогнать, прилагая меньшее усилие. Этот эффект возникает из-за нелинейности силы трения — при движении автомобиля сила трения меньше, чем в покое. Нелинейность этого типа можно назвать «пороговой» нелинейностью. При достаточно малых воздействиях (ниже «порога») система находится в одном состоянии (автомобиль не двигается), при достижении порога система переходит в другое состояние, в котором воздействие можно уменьшить или даже убрать (катящийся автомобиль может двигаться некоторое время по инерции).

Пороговая нелинейность ясно видна и в механизме возбуждения нервного импульса. Малые раздражения, вообще говоря, не приводят к возбуждению импульса; он пойдет лишь при достаточно сильном раздражении. Если бы не было этой нелинейности, наша жизнь стала бы совершенно невозможной. В теории солитонов более важны нелинейности других типов. С ними мы познакомимся в следующих главах.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Нужно обращать острей ума на самые незначительные и простые вещи и долго останавливаться на них, пока не привыкнем отчетливо и ясно прозревать в них истину.

Р. Декарт

В истории солитона много непонятного, но почему в прошлом веке не был открыт солитон, о котором пойдет речь в следующей части, объяснить просто невозможно. Цепочки из связанных маятников изучали многие ученые: проводили с ними опыты, рассчитывали волны, бегущие по ним. Однако никто не сумел увидеть возникающую в таких цепочках уединенную волну, которая сегодня считается одним из образцовых солитонов. В оправдание физиков и математиков прошлого века можно сказать, что и после того как этот солитон был обнаружен в теоретической работе советских физиков Я. И. Френкеля и Т. А. Конторовой (1938 г.), современным ученым понадобилось почти тридцать лет для выяснения его истинной солитонной природы. К сожалению, снова и снова приходится убеждаться, что для настоящего освоения открытия нужно не менее двадцати-тридцати лет!

С солитоном Френкеля и Конторовой (ФК-солитон) стоит познакомиться поближе. Он устроен не сложнее, чем солитон Рассела или Кортевега и де Фриза (КдФ-солитон), встречается в самых разных физических системах и его легко наблюдать. ФК-солитон имеет неизменную форму, не зависящую от его скорости. Он может покоиться или двигаться, причем зависимость его энергии E от скорости v такая же, как зависимость энергии от скорости для частицы с массой m_0 , которая следует из специальной теории относительности

$$E = \frac{m_0 v_0^2}{\sqrt{1 - v^2/v_0^2}}.$$

Отличие заключается в том, что вместо скорости света c в вакууме в этой формуле возникает v_0 — скорость распространения обычных синусоидальных волн малой амплитуды в среде, по которой бежит солитон. Более того, для ФК-солитонов существуют *античастицы* (*антисолитоны*). Солитоны отталкиваются друг от друга, а солитон и антисолитон

притягиваются и могут образовать связанное состояние — солитонный «атом». И все это можно увидеть на очень простой механической модели, которую совсем нетрудно сделать! Фарадею, Максвеллу, Кельвину и другим физикам прошлого века, предпочитавшим изучать сложные явления на простых моделях, этот солитон наверняка понравился бы.

Мы подойдем к нему издалека, сначала придется немного разобраться с *нелинейными колебаниями и волнами*. Тому, кто хочет по-настоящему понять устройство солитонов, необходимо познакомиться с нелинейными колебаниями одного маятника и понять, как распространяются волны в системе маятников, связанных друг с другом.

Глава 4

ПОРТРЕТ МАЯТНИКА

А круговое движение первее прямолинейного: оно проще и более совершенно.

Аристотель

Уравнение маятника

Рассмотрим движения хорошо известного *математического маятника*, т. е. небольшого грузика с массой m , подвешенного на абсолютно жесткой, нерастяжимой проволочке

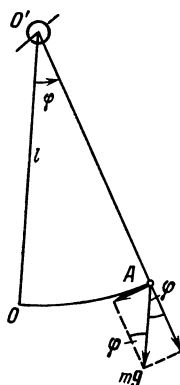


Рис. 4.1

длины l ; массу проволочки будем считать пренебрежимо малой. Обычно изучают малые колебания и поэтому говорят о грузике на нитке, но мы хотим изучать любые движения и потому подвесим наш жесткий маятник на хорошо смазанной оси в точке O' так, чтобы он мог свободно вращаться, а не только качаться вблизи положения равновесия. Угол φ , измеряемый в радианах, отсчитывается от нижнего положения против часовой стрелки (рис. 4.1). Полный оборот соответствует $\varphi = 2\pi$, два оборота — 4π и т. д. Движению по часовой стрелке соответствует уменьшение угла φ . Для полного оборота по часовой стрелке $\varphi = -2\pi$ и т. д. Для определенности будем считать, что в момент времени $t = 0$ маятник отклонен на нулевой угол, $\varphi(0) = 0$. В качестве

координаты грузика можно взять угол φ или же алгебраическое значение длины дуги $s = \varphi \cdot l$.

В каждой точке A движение происходит в направлении касательной к окружности под действием тангенциальной (направленной по касательной) составляющей силы тяжести. Как ясно из рисунка, эта составляющая равна $-mg \sin \varphi$ (с учетом нашего выбора положительного направления движения). Скорость движения груза по окружности равна $v = s' = l\varphi'$, где s' и φ' обозначают производные по времени t . Пользуясь тем, что малые смещения груза направлены по касательной к окружности, точно так же определим тангенциальное (т. е. по направлению дуги окружности) ускорение $a = v' = s'' = l\varphi''$, где s'' и φ'' — вторые производные по времени. Второй закон Ньютона для движения груза можно написать в виде $ma = -mg \sin \varphi$, или окончательно

$$\varphi'' = -\omega_0^2 \sin \varphi, \quad \omega_0^2 = g/l. \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1), выражающее угловое ускорение груза φ'' через его положение $\varphi(t)$ в тот же самый момент времени, называют *дифференциальным уравнением движения груза*. Решить его — значит найти такую зависимость угла φ от времени t , для которой в каждый момент выполнено соотношение (4.1).

Дифференциальное уравнение описывает все возможные движения маятника. Чтобы найти какое-то конкретное движение, надо еще добавить некоторые дополнительные условия. Например, если задать положение и скорость груза в начальный момент времени, то движение будет полностью определено. Как сказал бы математик, существует единственное решение дифференциального уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi'_0$ (φ_0 и φ'_0 могут быть любыми).

Это уравнение очевидно *нелинейно*. Даже если известны какие-то два его решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, новое решение их сложением не получишь. Ясно также, что умножение решения на число $c \neq 1$ не дает нового решения: вторая производная от $c\varphi_1$ равна $c\varphi_1''$, а $\sin(c\varphi_1) \neq c \sin \varphi_1$. Правда, есть простой случай, когда $\varphi_1 + \varphi_2$ тоже есть решение, но, к сожалению, этот случай не интересен, так как дает просто разное описание состояния покоящегося маятника. Действительно, уравнение имеет простые решения $\varphi = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi, \dots$ и $\varphi = \pm \pi$, $\pm 3\pi, \dots$. Первая серия соответствует *устойчивому положению равновесия* маятника внизу (минимум потенциальной энергии). Грузик покоится, его скорость, ускорение и действующая на него сила равны нулю. А вторая серия — это *неустойчивое положение равновесия* в крайней верхней точке (максимум потенциальной энергии). Если грузик чуть-

чуть отклонится от этого положения, то он придет в движение. Так как в реальном физическом мире всегда остаются какие-то малые неконтролируемые воздействия на грузик («возмущения»), долго находиться в этом состоянии он не может.

Малые колебания маятника

Чтобы подступиться к решению нелегкой задачи о движениях маятника, рассмотрим сначала малые колебания, когда угол настолько мал, что можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Уравнение теперь становится *линейным* (это и есть линеаризация!):

$$\varphi'' = -\omega_0^2 \varphi,$$

и можно угадать (или вспомнить!) его решение $\varphi = \varphi_M \sin(\omega_0 t)^*$, которое равно нулю при $t = 0$. Благодаря линейности уравнения, максимальное значение угла φ_M формально может быть произвольным числом, но мы, конечно, должны помнить, что при больших значениях φ_M наше приближение не годится. Поэтому число φ_M должно быть таким, что $\sin \varphi_M \approx \varphi_M$.

Этим решением, разумеется, не исчерпывается все множество решений. Мы заранее предположили, что $\varphi(0) = 0$, и этим отбросили, например, решение $\varphi = \cos(\omega_0 t)$, которое тоже легко угадать. Пользуясь линейностью, теперь можно найти и общее решение, складывая $\sin(\omega_0 t)$ и $\cos(\omega_0 t)$, умноженные на произвольные амплитуды. Ясно, что этим способом получается любое колебание, так как первое решение позволяет получить любое значение скорости в начальный момент, а второе — задать любое начальное положение.

Самое общее малое колебание можно получить и другим способом, понимание которого очень полезно. Заметим, что движение $\varphi = \varphi_M \sin(\omega_0 t)$ можно наблюдать, пустив другие часы отсчитывать время в момент t_0 (по старым часам). При новом отсчете времени то же самое движение будет выглядеть как $\varphi = \varphi_M \sin[\omega_0(t + t_0)]$. Нетрудно проверить, что это решение при любых t_0 удовлетворяет уравнению 4.1. Отсюда следует, что если движение $\varphi = \varphi_M \sin(\omega_0 t)$ возможно, то и движение $\varphi = \varphi_M \sin[\omega_0(t + t_0)]$ также возможно. А это движение уже самое общее, поскольку подбором φ_M и t_0 можно задать любые начальные значения скорости и положения.

*) Для этого достаточно вспомнить правило дифференцирования тригонометрических функций. Ниже это движение будет построено другим, геометрическим способом.

Решение уравнения для малых колебаний можно найти совсем простым способом. Достаточно вспомнить геометрическое определение тригонометрических функций и закон движения материальной точки по окружности. Пусть точка M движется по окружности единичного радиуса с постоянной скоростью $V = \omega_0$ (рис. 4.2). Скорость V направлена по касательной, и ее проекция на ось Oy равна $\omega_0 \cos \alpha$, где $\alpha = \omega_0 t$ (радиан). Точка S совершает гармоническое движение, длина отрезка $(OS) = \sin(\omega_0 t)$, и ее скорость v равна проекции скорости V на ось Oy , т. е. $v = \omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Полное ускорение a направлено к центру и равно $V^2 = \omega_0^2$ (радиус окружности равен 1). Ускорение точки S равно проекции ускорения a на ось Oy , т. е. $-\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$. Таким образом, ускорение точки S равно $-\omega_0^2(OS)$. Если взять $(OS) = \varphi$, получим $\varphi'' = -\omega_0^2 \varphi$. Обозначив $\omega_0^2 = g/l$, находим, что $\varphi = \sin(\omega_0 t)$ есть решение линейного уравнения для малых колебаний маятника. Заодно вспомним, что период колебаний T совпадает с временем полного оборота точки M по окружности, т. е. равен

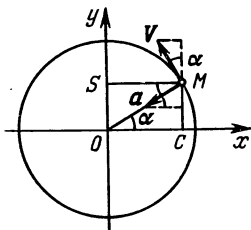


Рис. 4.2

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Маятник Галилея

Эта формула — выдающееся достижение до-ньютоновской физики и математики — была впервые найдена Гюйгенсом*). С точностью до числового множителя она, по-видимому, была известна уже Галилею. История ее открытия интересно и подробно описана в упоминавшейся книге С. Г. Гиндикина, но с одним утверждением, сделанным в ней, можно поспорить. Там сказано (с. 39): «Галилей обнаруживает связь между длиной маятника и частотой его колебаний: квадраты периодов колебаний относятся как длины. Вивiani пишет, что Галилей получил этот результат, «руководствуясь геометрией и своей новой наукой о движении», но никто не знает, каким мог быть теоретический вывод. Быть может, все же Галилей подметил закономерность

*) Гюйгенс получил ее другим способом, основанным на открытом им свойстве изохронности колебаний циклоидального маятника, а рассуждения, приведенные выше, использовал для определения ускорения точки, движущейся по окружности (о циклоидальном маятнике см. в книге: Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках, 2-е изд. — М.: Наука, 1984. — Библиотечка «Квант», вып. 14).

экспериментально?» Принять это предположение было бы несправедливостью по отношению к Галилею. На опыте он *лишь подметил* зависимость периода от длины, но закон пропорциональности периода квадратному корню из длины нашел с помощью довольно остроумных рассуждений, которые представляют не только исторический интерес.

Основным для Галилея был найденный опытным путем закон равной продолжительности качаний маятников одинаковой длины, или изохронизм их колебаний (от греч. «изос» — равный, «хронос» — время). Для дальнейших рассуждений он использовал открытый им закон свободного падения и связь движения по наклонной плоскости со свободным падением. Если слегка модернизировать рассуждения Галилея, как это сделал Л. И. Мандельштам в своих замечательных «Лекциях по колебаниям», прочитанных в 1930 г., то можно даже получить формулу, похожую на формулу Гюйгенса.

Заменим движение груза по дуге AO из состояния покоя свободным движением по хорде AO (рис. 4.3). Тогда время t , затраченное на это падение, равно времени свободного падения из O'' в O . Это следует из известного Галилею факта, что ускорение движения по катету прямоугольного треугольника относится к g как длина OA относится к длине $(OO'') = 2l$ (сообразите, почему). Так как $2l = \frac{1}{2}gt^2$, то четверть периода колебаний равна $2\sqrt{l/g}$, а полный период $T = 8\sqrt{l/g}$. Галилей рассуждал несколько иначе и ограничился

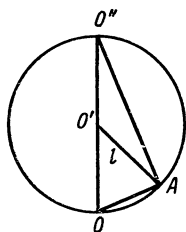


Рис. 4.3

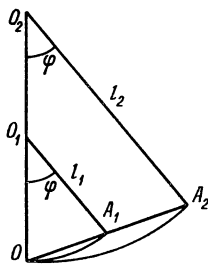


Рис. 4.4

утверждением о пропорциональности времен скатывания по хорде AO и движения маятника по дуге OA времени свободного падения по вертикали $O''O$, откуда он и вывел пропорциональность этого времени квадратному корню из длины маятника.

Подлинное рассуждение Галилея легко понять из рис. 4.4. Время скатывания груза по наклонной плоскости OA_1A_2 пропорционально квадратному корню из длины (OA_1) для первого маятника и (OA_2) для второго. Эти длины OA_1 и OA_2 пропорциональны длинам маятников $(O_1O) = l_1$ и $(O_2O) = l_2$. С учетом закона свободного падения отсюда следует, что T пропорционально \sqrt{l} для *подобных колебаний* (т. е. с одинаковым максимальным

углом отклонения φ). Используя изохронность, доказываем, что это верно для любых колебаний.

Для малых колебаний рассуждения Галилея совершенно правильны. Малые колебания действительно изохронны. Как мы теперь понимаем, *изохронность прямо следует из линейности*. Действительно, если колебание с единичной амплитудой определяется функцией $\varphi = \sin(\omega_0 t)$, то колебание с амплитудой φ_M , в силу линейности, можно найти простым умножением на φ_M . Это и значит, что период остается неизменным. Остальная часть рассуждения Галилея особенно интересна тем, что в ней содержится намек на использование соображений о подобном поведении подобных систем. В ясном виде *принцип подобия* впервые сформулировали Ньютон и Гук. Это настолько полезная вещь, что стоит сделать небольшое отступление.

О подобии и размерностях

Малое с великим схоже,
Хоть и разнится на вид.

В. Гёте

Принцип подобия Ньютона — Гука оставался в забвении более ста лет, пока его не возродил Фурье в упоминавшейся выше работе «Аналитическая теория теплоты». Он ввел очень важные понятия *размерности* физической величины и *принцип однородности по размерностям*. Измерение всех механических величин сводится к измерению нескольких основных, в качестве которых обычно берут длину (размерность L), время (размерность T) и массу (размерность M). Остальные величины назовем «производными».

Так, измерение площади сводится к измерению длин. Чтобы измерить площадь прямоугольника S , мы измеряем длины его сторон и перемножаем их. Если обе стороны умножить на одно и то же число c , то площадь умножится на c^2 . Это означает, что размерность площади равна квадрату размерности длины, и этот факт можно записать с помощью «формулы размерности» $[S] = L^2$. Формула размерности для S говорит нам, что площади любых фигур умножаются на одно число c^2 , если все линейные размеры умножить на c (например при фотоувеличении). Если бы мы не знали, как вычислить площадь круга радиуса R , то из формулы размерности получили бы, что $S = cR^2$, где c — некоторое число, о котором формула размерности ничего не говорит. Измерив c для какого-нибудь круга, мы с помощью формулы размерности будем знать, как вычислить площадь любого круга.

Точно так же, исходя из определения скорости равномерного движения $v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, можно написать для нее формулу размерности $[v] = LT^{-1}$. Она просто означает, что при увеличении всех расстояний в c_L раз и всех промежутков времени в c_T раз скорость умножится на число c_L/c_T . Обычно, когда записываются формулы для физических величин, они всегда сопровождаются указанием на единицы измерения ($S[\text{см}^2]$, $v[\text{см} \cdot \text{с}^{-1}]$ и т. д.). Это указание одновременно дает нам и размерность величины. Так как ускорение измеряется, скажем, в $\text{см} \cdot \text{с}^{-2}$, то формула размерности для ускорения есть, очевидно, $[a] = LT^{-2}$.

Аналогично легко найти формулы размерности для силы $[F] = MLT^{-2}$, для энергии $[E] = ML^2T^{-2}$ и для других производных величин. Показатели степеней в формулах размерности называются показателями размерности. С ними можно обращаться, как с обычными показателями степени.

Например, возьмем формулу «сила = масса \times ускорение». Если увеличить все линейные размеры в c_L раз, промежутки времени в c_T раз и массы в c_M раз, то ускорение увеличится в c_L/c_T^2 раз, а сила — в $c_M c_L/c_T^2$ раз. Это мы и записываем с помощью формулы размерности для силы. Очевидно, что ее можно получить и так: $[F] = M[a] = MLT^{-2}$, т. е. с формулами размерности можно обращаться, как с обычными формулами.

Принцип однородности по размерностям требует, чтобы обе части равенства, выражающего физический закон, имели одинаковые формулы размерности. Это правило хорошо известно и используется для проверки правильности полученных при вычислениях соотношений. Если мы, например, вычисляли объем какой-то сложной фигуры и получили для него выражение, измеряемое в квадратных сантиметрах (размерность L^2), то нужно искать ошибку в вычислениях. Особенно интересно, однако, обратное применение этого принципа — для получения самих формул.

Получим, например, закон Галилея для свободного падения тела. Пройденный за время падения t путь s может зависеть еще от массы тела m и от действующей на него силы mg . Мы можем предположить поэтому, что $s = kt^d m^b (mg)^c$, где d, b, c, k — некоторые числа. Формула размерности для правой части есть $T^d M^{b+c} [a^c] = M^{b+c} T^{d-2c} L^c$. Формула размерности левой части $[s] = L$. Приравнивая показатели размерности, находим $c = 1, d - 2c = 0, b + c = 0$, т. е. $d = 2, b = -1$, так что $s = kgt^2$, где k — неизвестное число. Его уже нельзя определить из соображений подобия и размерности.

Найдем формулу Гюйгенса для линейных колебаний маят-

ника. Период T может зависеть от длины l , массы груза m и действующей на грузик силы f , т. е. $T = dm^a f^b l^c$. Отсюда находим уравнение размерностей $[T] = M^{a+b} L^{b+c} T^{-2b}$, т. е. $a + b = 0$, $b + c = 0$, $-2b = 1$. Для периода колебаний получаем формулу

$$T = d \sqrt{ml/f}.$$

При $f = mg$ получается формула Гюйгенса, но с неизвестным множителем d .

Интересно, что этим способом мы получили более общую формулу чем (4.1), которая годится не только для маятника в поле силы тяжести. Например, если грузик имеет электрический заряд q и помещен в однородное и постоянное электрическое поле E между обкладками конденсатора, то на него действует сила $f = mg + qE$. Зная формулу Гюйгенса, мы определяем d и для маятника в электрическом поле сразу находим период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{(mg + qE)}}.$$

Конечно, таким простым способом можно получить полный ответ далеко не всегда. Рассмотрим нелинейные колебания маятника в поле силы тяжести. Теперь зависимостью периода от амплитуды, как мы сделали это выше, пренебречь нельзя. Небольшое размышление показывает, что наши рассуждения остаются верными, но d нельзя считать просто числом — d оказывается функцией безразмерного выражения, зависящего от амплитуды колебания, например, от отношения длины дуги $s_M = l\varphi_M$ к длине маятника l . Таким образом, для периода произвольных колебаний получаем

$$T = 2\pi d(\varphi_M) \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.2)$$

Так как при малых значениях φ_M должно быть $d \approx 1$, то функция $d(\varphi_M)$ удовлетворяет условию $d(\varphi_M) \rightarrow 1$ при $\varphi_M \rightarrow 0$.

Легко сообразить, что $d(\varphi_M) > 1$. Действительно, $|\sin \varphi| < |\varphi|$ и возвращающая сила для нелинейного маятника всегда меньше, чем для линейного маятника. Нелинейная сила дает меньшее ускорение грузу на всем пути, а значит, период нелинейного колебания всегда больше периода линейного колебания. Это отличие возрастает с ростом амплитуды φ_M . Можно доказать, что $d(\varphi_M)$ возрастает с ростом φ_M и что период неограниченно возрастает, если $\varphi_M \rightarrow \pi$.

Итак, совсем простые средства позволяют довольно много узнать о свойствах очень непростой системы. Здесь, однако, уместно сделать предостережение. То, что маятник непростой прибор, по-видимому, ясно. Недаром он послужил Галилею, Гюйгенсу и Ньютону одним из основных инструментов, с помощью которых они открыли законы механики. Хорошо послужит он и в наших попытках разобраться с нелинейными явлениями.

А вот простота принципа подобия и соображений размерностей несколько обманчива. Это довольно «сильный» принцип, но его применение требует очень хорошего понимания физической сущности явления, к изучению которого он применяется, а общих правил — как достичь такого понимания — нет. Применение принципа подобия в более сложных задачах — это в какой-то мере искусство. Потому-то так долго и не понимали это открытие Ньютона, а когда поняли, то начались бесконечные споры о его смысле, возможностях применения в тех или иных задачах и даже о его полезности. Эти споры не вполне затихли и сегодня. До сих пор современно звучат слова, сказанные 70 лет назад большим знатоком и пропагандистом анализа размерностей Рэлеем: «Меня часто удивляет, что даже весьма крупные ученые уделяют столь незначительное внимание великому принципу подобия. Нередко случается, что результаты кропотливых исследований преподносятся как новые «законы», которые на самом деле можно было бы получить в течение нескольких минут». К сожалению, мы не сможем уделить этому принципу достаточно внимания и рекомендуем читателю самостоятельно тренироваться в открытии с его помощью простых физических законов.

В качестве упражнения найдите методом размерностей ускорение точки, движущейся равномерно по окружности, и определите период малых колебаний тяжелой невязкой жидкости (например ртути) в U-образной трубке. Некоторые другие примеры встретятся позже, а сейчас настало время вспомнить еще более великий принцип.

Сохранение энергии

Кинетическая энергия грузика, подвешенного на нити и совершающего малые колебания, равна $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$, а потенциальную энергию легко найти с помощью рис. 4.5. Так как $(OA) = 2l \sin(\varphi/2)$, то $(OH) = 2l \sin^2(\varphi/2)$, и потенциальная энергия равна $2mgl \sin^2(\varphi/2)$. Полная энергия

$$E = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi})^2 + 2mgl \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Удобно немного преобразовать это соотношение, сделав все его члены безразмерными:

$$\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2E}{m\omega_0^2 l}. \quad (4.3)$$

В правой части здесь написано отношение полной энергии маятника к кинетической энергии точки с массой m , равномерно вращающейся по окружности радиуса l с периодом $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Обозначим эту энергию буквой E_0 , так что правая часть равна отношению E/E_0 . Если амплитуда качаний φ_M мала, то $\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2$, и закон сохранения энергии (4.3) имеет совсем простой вид

$$\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} + \varphi^2 \approx \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 l^2. \quad (4.4)$$

Полную энергию удобно выразить через амплитуду φ_M . В крайней точке, где $\varphi = \varphi_M$, угловая скорость равна нулю. Из уравнения (4.3) поэтому следует, что

$$E/E_0 = 4\sin^2(\varphi_M/2) \approx \varphi_M^2,$$

где приближенное равенство, как всегда, относится к малым колебаниям.

С законом сохранения энергии связаны два новых способа наглядного графического изображения движений и других механических систем. Обычный способ — это изображение зависимости $\varphi(t)$. Например, график простого гармонического колебания $\varphi = \varphi_M \sin(\omega_0 t)$ позволяет наглядно представить положение груза в разные моменты времени (рис. 4.6). С помощью этого графика можно также найти скорость груза в любой заданный момент.

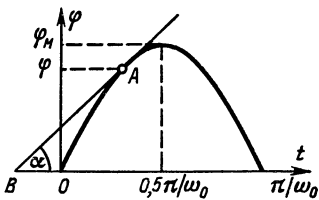


Рис. 4.6

Она определяется углом наклона касательной BA к кривой в точке A с координатами $(t, \varphi(t))$, т. е. $\varphi' = \operatorname{tg} \alpha$. На графике, однако, не видно, как распределяется полная энергия при движении и как она связана с амплитудой. Для наглядного представления изменения кинетической и потенциальной энергий груза нарисуем энергетическую диаграмму.

Нарисуем зависимость потенциальной энергии груза $U(\varphi)$ от его положения. В формуле (4.4) потенциальную

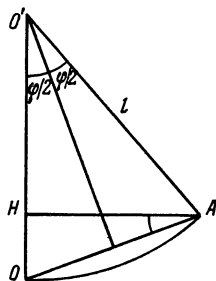


Рис. 4.5

энергию представляет слагаемое φ^2 , а кинетическую T — слагаемое $(\dot{\varphi})^2/\omega_0^2$. На графике удобнее откладывать отношения U/E_0 , T/E_0 , E/E_0 . Отложим по горизонтальной оси отрезок OA , длина которого равна $\varphi(t)$, а в направлении вертикальной оси отложим отрезок $(AA_2) = E/E_0$, причем $(AA_1) = U/E_0$, $(A_1A_2) = T/E_0$ (рис. 4.7, б). Так как полная энергия постоянна, то точка A_2 при изменении t будет двигаться по пря-

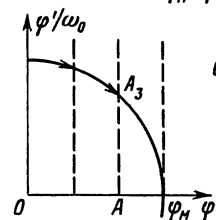
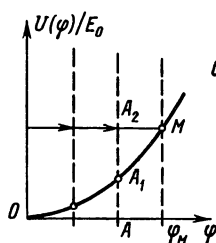
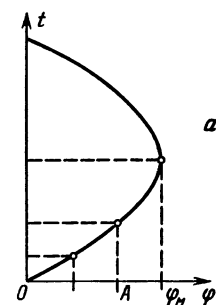


Рис. 4.7

молинейному отрезку A_2M , а точка A' — по параболе $(U(\varphi)/E_0) = \varphi^2$. На энергетической диаграмме видно, как перераспределяется полная энергия между кинетической и потенциальной составляющими при различных значениях φ и как амплитуда связана с полной энергией. Если нарисовать над энергетической диаграммой график $\varphi(t)$ (рис. 4.7, а), то можно наглядно увидеть зависимость кинетической и потенциальной энергий от времени. Когда маятник движется из нижнего положения к крайнему правому, где $\varphi = \varphi_M$, изображающая точка A_2 движется направо до точки M , а затем возвращается налево. Как при этом меняются кинетическая и потенциальная энергия, видно достаточно ясно, но скорость определять не очень удобно (нужно вычислять квадратный корень из длины отрезка A_1A_2). Чтобы следить также и за положением и скоростью груза, удобно представить движение еще одним способом.

Нарисуем под нашими двумя диаграммами еще одну, на которой по оси абсцисс по-прежнему будем откладывать значения φ , а по оси ординат отложим значения $\dot{\varphi}'/\omega_0$ в тот же момент времени (рис. 4.7, в). Тогда при движении груза точка A_3 будет описывать окружность с радиусом, равным $\varphi_M = \sqrt{E/E_0}$. Это видно из уравнения (4.4), так как $(OA) = \varphi(t)$ и $(AA_3) = \dot{\varphi}'(t)/\omega_0$. В случае простого гармонического колебания $(OA) = \varphi_M \sin(\omega_0 t)$, $(AA_3) = \varphi_M \cos(\omega_0 t)$, и ясно, что точка A_3 вращается по окружности равномерно.

В этом месте внимательный, но нетерпеливый читатель воскликнет: «Но ведь это же очевидно! С этого начиналось описание гармонического колебания. Более того, мы вернулись

просто к определению тригонометрических функций. Всем известно, что если точка равномерно движется по окружности единичного радиуса с угловой скоростью ω_0 , то ее проекции на прямые, проходящие через центр, определяют тригонометрические функции. В данном случае сразу ясно, что $(OA) = \varphi_M \sin(\omega_0 t)$.

Все это, конечно, верно. Но дело в том, что *нарисовать зависимость скорости φ' от положения φ можно, не только не решая уравнения маятника, но даже и забыв о его существовании*. Достаточно знать закон сохранения энергии и выражение для энергии через координату и скорость, а это можно сделать не только для малых качаний маятника и не только для маятника! Пользуясь диаграммой зависимости скорости от положения, можно, наоборот, приближенно найти, как меняется положение точки со временем.

Диаграмму, на которой изображена зависимость скорости от координаты при различных значениях энергии, называют фазовой диаграммой. «Фаза» здесь означает состояние частицы, определяемое ее координатой и скоростью.

По фазовой диаграмме можно приближенно найти и график движения. Для этого разобьем кривую, соответствующую какому-то заданному значению энергии, на небольшие отрезки. Пусть (φ_1, φ'_1) и (φ_2, φ'_2) — значения положений и скоростей частицы на концах одного отрезка. Чтобы найти время $\Delta t = t_2 - t_1$, за которое частица переходит из состояния (φ_1, φ'_1) в состояние (φ_2, φ'_2) , достаточно заметить, что среднюю скорость $\bar{\varphi}'$ между моментами времени t_1 и t_2 можно вычислить двумя способами: $\bar{\varphi}' = (\varphi_2 - \varphi_1)/\Delta t$ и $\bar{\varphi}' = (\varphi'_1 + \varphi'_2)/2$. Приравнявая эти выражения, получаем

$$t_2 - t_1 \approx 2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi'_2 + \varphi'_1}. \quad (4.5)$$

Упражнение: покажите, что приближенное равенство (4.5) становится точным, если движение из состояния (φ_1, φ'_1) в состояние (φ_2, φ'_2) равномерно ускоренное. Чем меньше Δt , тем лучше становится приближение (4.5) для произвольного движения.

Язык фазовых диаграмм

Математика — тоже язык!

Приписывается Дж. У. Гиббсу

Основная ценность всего этого длинного, не самого простого и не самого красивого способа решения задачи о малых колебаниях маятника состоит конечно в том, что этим же способом можно изучать и любые колебания.

При этом на новом языке «большие» (нелинейные) колебания выглядят ненамного сложнее малых. Иными словами, новый язык лучше приспособлен для решения сложных задач, и его нужно изучать. Свободное владение языком означает, что при чтении вам не нужно переводить с него на родной. Поначалу этого достичь нелегко, и приходится заниматься переводом. С течением времени, попрактиковавшись в применениях этого языка, вы вдруг замечаете, что начинаете на нем думать, и необходимость в переводе возникает все реже и реже.

Чем же отличается новый язык от обычного? Главное, разумеется, не в том, что мы изобразили движение другим способом, а в том, что мы сумели совсем по-новому подойти к проблеме. Действительно, нарисовать фазовую диаграмму можно, не решая никаких дифференциальных уравнений. Изобразив на одном и том же графике в плоскости $(\varphi, \varphi'/\omega_0)$ кривые, соответствующие разным значениям энергии, легко сразу находить максимальные значения отклонения маятника и его скорости. Нетрудно также составить общее представление о характере движения с данной энергией. Чтобы понять, как движется маятник, вовсе не нужно знать его точное положение в любой момент времени, гораздо важнее знать общий характер его движений, который и дается фазовой диаграммой. К тому же любое конкретное движение можно восстановить по известной зависимости φ' от φ при данной энергии, которая называется *фазовой траекторией*. Выше мы указали лишь приближенный способ восстановления обычной траектории по фазовой траектории, но это вычисление можно сделать сколь угодно точным, затратив соответственно большее время. Для ЭВМ решение любой такой конкретной задачи вообще не проблема.

Язык фазовых диаграмм и фазовых траекторий — очень современный и систематически применять его начали сравнительно недавно. Закон сохранения энергии применялся значительно раньше. В особенно ясной форме это сделал знаменитый немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815 — 1897)*). Он рассматривал выражение для энергии (4.3) как дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$ и выражал его решения с помощью так называемых эллиптических функций, теории которых он, после Абеля и Якоби, придал законченный современный вид. Обобщения этой глубокой математической тео-

*) См. о нем в книге: Замечательные ученые. — М.: Наука, 1980. — Библиотечка «Квант», вып. 9, в очерке о Софье Васильевне Ковалевской, талант которой он высоко ценил.

рии и сегодня применяются математиками и физиками для решения сложных нелинейных уравнений и играют очень важную роль в математической теории солитонов. Мы с сожалением должны пройти мимо этих прекрасных зданий, построенных математиками. Для описания их конструкций требуется слишком сложный математический язык. К счастью, основные свойства движений маятника и других не очень сложных систем можно описать на более простом и наглядном языке фазовых диаграмм и фазовых траекторий.



Анри Пуанкаре
(1854—1912)

Впервые для этих целей его применил в 1885 г. французский математик, преподаватель Политехнической школы*) в Париже Анри Леоте (1847—1916). Он в основном занимался различными проблемами механики и использовал фазовые диаграммы для изучения работы некоторых автоматических регуляторов. Леоте не пытался создать какую-либо общую математическую теорию, и его подход к фазовым диаграммам был, скорее, физическим. Он не знал, что за три года до этого были уже заложены основы более общей математической теории. В 1882 г. 28-летний французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912) начал публиковать серию работ под названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», в которой он разработал качественный и геометрический подход к изучению решений дифференциальных уравнений. Этот подход радикально отличался от принятых в то время представлений о том, что значит решить дифференциальное уравнение. Сам Пуанкаре это очень ясно понимал: «Итак, необходимо изучать функции, определенные дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям. Полное изучение функций состоит из двух частей: 1) качественной (так сказать), или геометрического изучения кривой, определенной функцией; 2) коли-

*) Самое знаменитое высшее учебное заведение Франции того времени. В Политехнической школе учились Ампер, Араго, Френель, Пуассон, Коши и другие известные ученые, в том числе Леоте и Пуанкаре.

чественной, или вычисления значений функций... Так же для изучения алгебраической кривой начинают с того, что строят эту кривую, как говорят в курсах элементарной математики, т. е. находят, какие ветви кривой замкнуты, какие бесконечны и т. д. После этого качественного изучения кривой можно найти некоторое число отдельных точек.

Естественно, что именно с качественной стороны должна начинаться теория всякой функции, и вот почему в первую очередь возникает следующая задача: построить кривые, определяемые дифференциальным уравнением. Это качественное изучение; когда оно будет проделано полностью, то принесет самую большую пользу численному анализу функций... Впрочем, это качественное изучение и само по себе будет иметь первостепенный интерес. Различные и чрезвычайно важные вопросы анализа и механики могут быть сведены к нему».

В наше время такие взгляды кажутся совершенно естественными, почти сами собой разумеющимися. Однако сто лет назад эти идеи выглядели слишком необычными и не могли быть сразу усвоены и признаны. Мешало этому усвоению также и сильное отклонение интуитивных, геометрических рассуждений Пуанкаре от принятых тогда канонов математической строгости доказательств — многие утверждения не были доказаны, а некоторые, как выяснилось впоследствии, оказались ошибочными. Тем не менее, по мере того как росла слава Пуанкаре, которого по праву считают величайшим французским математиком второй половины прошлого века*), его труды и идеи привлекали все большее внимание. Лет через двадцать-тридцать (!) начали появляться исследования, в которых качественная теория Пуанкаре получила развитие и строгое обоснование. Развитие этой теории продолжается и в наше время, и в любой книге, посвященной нелинейным дифференциальным уравнениям или нелинейным колебаниям, можно найти многократное упоминание его имени и ссылки на его работы.

Иной была судьба работы Леоте. Связь его исследования с идеями Пуанкаре не была замечена ни самим Леоте, ни Пуанкаре, ни кем-либо другим, и статья Леоте была полностью забыта. Другие его труды по теории машин и механизмов, по различным приложениям математического анализа были высоко оценены, и он стал с 1890 г. членом

*) Подобно Эйлеру и Гауссу, он охватывал своими работами почти все основные направления в современной ему математике и физике. Будучи профессором Сорбонны, с 1881 г. до своей преждевременной смерти он каждый год читал лекции по новому предмету!

Парижской Академии наук. Но эта работа пребывала в забвении, пока о ней не вспомнил замечательный советский физик Александр Александрович Андронов (1901–1952). Он был учеником Леонида Исааковича Мандельштама (1879–1944) и под его влиянием занялся проблемами нелинейных колебаний. Еще будучи аспирантом Мандельштама, он «открыл» для себя труды Пуанкаре, и сразу понял, что разработанный в них математический язык наиболее подходит для решения увлекших его проблем. Мандельштам эту идею чрезвычайно одобрил и поддержал, и в результате выросло целое направление, в дальнейшем детально раз-



Александр
Александрович
Андронов
(1901 – 1952)

работанное уже Андроновым и его учениками (в особенности надо упомянуть А. А. Витта) и обогатившее не только физику и технику, но и саму качественную теорию дифференциальных уравнений. Как говорил Пуанкаре: «Физика не может обойтись без математики, которая предоставляет ей единственный язык, на котором она может говорить. Отсюда взаимные и беспрестанные услуги, которые оказывают друг другу чистый анализ и физика. Замечательная вещь — работы аналитиков — были тем более плодотворны для физиков, чем более они культивировались исключительно ради своей красоты. Взамен физика, ставя новые задачи, была столь же полезна математикам, как модель для художника».

Хотя эти слова замечательно точно и ясно описывают связь математики с физикой вообще и теории колебаний с теорией дифференциальных уравнений в частности, все-таки сразу видно, что они сказаны математиком. Физик никогда не согласится даже сравнить свою науку с моделью для математики, наоборот, он будет говорить о математических моделях тех или иных сложных физических явлений. Наиболее важная часть работы физика — найти подходящую математическую модель, описывающую наиболее важные черты исследованного физического явления. Следующий этап — изучение модели — по характеру более близок к работе «чистого» математика. Но и здесь физик остается физиком. Пути решения математических задач ему часто подсказывает физиче-

ская интуиция, а постановка этих задач просто «диктуется» физикой. Не математическая красота, а желание как можно точнее и глубже понять реальные физические явления определяет для физика и само представление о том, что значит решить математическую задачу. Так что афоризм Пуанкаре — это «правда, только правда, ничего кроме правды», но не «вся правда».

Чтобы не забывать об этом, приведем слова Л. И. Мандельштама о связи физики с математикой в теории колебаний: «Конечно, поскольку вы имеете дело с уравнениями, главным образом дифференциальными, то с некоторой точки зрения все это — математика. Но не в этом главное. Прежде всего потому, что именно физика учит нас, как допрашивать дифференциальные уравнения. В теории колебаний математический образ... имеет чрезвычайно наглядное, не только геометрическое, но и физическое содержание. Иначе говоря, в подкрепление к анализу вы здесь имеете не только геометрическую, но и физическую интуицию. Причем эта наглядность и интуиция может быть весьма разветвленной и богатой и может опираться на радиотехнический, электротехнический, оптический и тому подобный материал».

До сих пор мы говорили в основном о качественных методах изучения нелинейных колебаний. Однако качественное исследование решает лишь половину задачи, да к тому же оно и не всегда возможно. Для физики, астрономии, механики этого мало — необходимо уметь рассчитывать движения системы, производить вычисления. Сегодня в этом очень помогают ЭВМ, но даже и они далеко не всегда могут справиться со сложными задачами, возникающими при изучении реальных систем.

Методы расчета движений сложных систем начали разрабатываться в XVIII в. и предназначались, главным образом, для вычисления планетных орбит. Если пренебречь притяжением планет друг к другу, а учитывать лишь их притяжение к Солнцу, то задача решается легко. Однако если попытаться рассчитать, скажем, движение Луны, то сразу обнаружится, что сделать это чрезвычайно трудно — нужно учитывать силы, действующие между тремя телами — Солнцем, Землей и Луной.

Первыми начали решать подобные задачи Д'Аламбер и Эйлер, которые и предложили идею так называемого метода возмущений. Она заключалась в том, чтобы выделить самые сильные взаимодействия, определяющие главные особенности движения, а остальными, малыми взаимодействиями (их называют возмущениями) сначала пренебречь. Если движения такой упрощенной системы («невозмущенные» движения) удастся рассчитать, то затем можно вычислить поправки, т. е. найти «возмущенное» движение.

Идеи Д'Аламбера и Эйлера подробно разработали Лагранж, Лаплас и Пуассон. В частности, Пуассон заметил, что этой идеей

можно воспользоваться для расчета малых колебаний нелинейного маятника. При этом невозмущенными считаются колебания линейного маятника ($\sin \varphi$ заменяется на φ), а возмущение определяется нелинейными поправками к возвращающей силе. Метод Пуассона позволял получить хорошее приближение, если возмущение достаточно мало, а интервал времени, на котором нам нужно знать движение, не слишком велик (первая успешная попытка получить приближенные решения на сколь угодно большом интервале времени принадлежит Остроградскому).

Примерно по такой же схеме велись вычисления в небесной механике (невозмущенное движение — это движение по кеплеровым эллиптическим орбитам). Лагранж и особенно Лаплас выполнили большие и трудоемкие вычисления возмущенных движений планет, на основании которых можно было определять точные положения планет в далеком прошлом и будущем. Применяя их методы, Адамс и Леверье впоследствии обнаружили отклонение орбиты Урана от рассчитанных значений и объяснили это явление возмущающим влиянием новой, неизвестной планеты Нептун.

В дальнейшем А. Пуанкаре и замечательный русский математик Александр Михайлович Ляпунов (1857 — 1918) чрезвычайно усовершенствовали и обобщили методы возмущений. Хотя они, в основном, интересовались задачами небесной механики, созданные ими методы оказались столь общими, что их легко было приспособить к решению совсем других нелинейных задач физики и техники. Когда примерно 50 лет назад Мандельштам и Андронов начали применять методы Ляпунова и Пуанкаре в нелинейной радиофизике, они были немало поражены тем, сколь эффективны методы небесной механики при расчете, например, работы лампового генератора. С тех пор область применения этих методов постоянно расширялась.

Примерно в то же время Николай Митрофанович Крылов (1879 — 1955) и Николай Николаевич Боголюбов разработали новые методы теории возмущений в нелинейной механике, позволяющие описывать не только периодические, но и гораздо более сложные движения нелинейных систем. Эти методы были применены Н. Н. Боголюбовым к описанию хаотических движений в системах, состоящих из очень большого числа частиц. В последние годы, в особенности под влиянием идей А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда, началось объединение качественных и количественных методов исследования



Александр Михайлович
Ляпунов
(1857 — 1918)

нелинейных систем. Все это привело к замечательному расцвету нелинейной механики, которая теперь с успехом применяется в самых разных науках и сыграла огромную роль в развитии теории солитонов.

Продолжим разбор движений маятника, следуя по пути, подсказываемому физической и отчасти геометрической интуицией. Ясно, что фазовые траектории можно нарисовать для движения маятников с любой энергией. Совокупность всех возможных фазовых траекторий составляет фазовый портрет. По этому портрету легко получить наглядное качественное представление о всевозможных движениях.

Фазовый портрет

Чтобы научиться рисовать и без труда понимать фазовые портреты, рассмотрим сначала совсем простые задачи. Пусть точка равномерно движется по прямой и в начальный момент $t = 0$ ее координата s равна нулю, так что $s = v_0 t$. График этого движения — прямая линия с наклоном, пропорциональным скорости (рис. 4.8, а). Если на вертикаль-

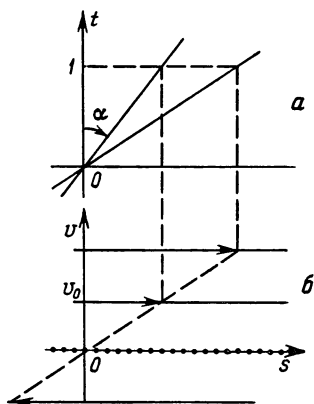


Рис. 4.8

ной оси графика 1 см соответствует 1 с времени, а 1 см по горизонтали соответствует 1 см пути, то скорость очевидно равна $\operatorname{tg} \alpha$ см/с. Дальше мы не будем упоминать об этом соглашении и с производными величинами будем обращаться точно так же (на оси скорости 1 см соответствует скорость 1 см/с и т. д.). Отрицательным значениям угла отвечают движения в отрицательном направлении по оси Os (рис. 4.8, б).

Нетрудно нарисовать любую фазовую траекторию. Это просто прямые, параллельные горизонтальной оси Os и пересекающие вертикальную ось в точке, соответствующей значению скорости, равному v_0 . Когда скорость положительна, изображающая точка A пробегает фазовую траекторию слева направо, при отрицательной скорости — в обратном направлении. Если $s = s_0 + v_0 t$, то график движения не проходит через точку O , но фазовая траектория такого движения совпадает с фазовой траекторией движения $s = v_0 t$. Это, конечно, легко проверить, но на самом деле это должно быть очевидным, так как фазовые траектории не зависят от момента t_0 , в который мы начинаем отсчет времени.

Если точка покоится, то на графике движения ей соответствует прямая, параллельная оси времени, т. е. $s = s_0$ и $\alpha = 0$. На фазовой диаграмме этой прямой соответствует точка $s = s_0$ на оси Os , т. е. точка $(s, v) = (s_0, 0)$. При разных значениях s_0 эти точки заполняют всю ось Os . Каждую точку оси Os нужно рассматривать как отдельную фазовую траекторию.

Таким образом, *фазовые траектории* точки, движущейся равномерно по прямой, — это *прямые, параллельные оси Os* , а также точки оси Os . Через каждую точку фазовой плоскости (s, v) проходит только одна фазовая траектория, если договориться, что выбор начала отсчета времени t_0 несуществен (т. е. важно лишь, какую кривую пробегает изображающая точка). Чтобы больше не возвращаться к этому, можно, как это делалось и раньше, условиться, что $s = 0$ при $t = 0$, а остальные движения получать сдвигом начала отсчета времени.

В качестве упражнения постройте фазовые диаграммы равномерно ускоренных движений грузика, падающего с высоты h или подбрасываемого вверх. Точка O на фазовой диаграмме представляет фазовую траекторию лежащего на земле грузика. Вообще такие точки на фазовых диаграммах называются *точками покоя*. В самом нижнем положении наш грузик покоится устойчиво, иными словами, точка O на фазовой диаграмме — *устойчивая точка покоя*. Если грузик слегка подбросить, он вернется назад. Дальнейшее движение грузика зависит от его устройства как реальной физической системы. Если грузик — модель упругого мячика, падающего на асфальт, то он будет отскакивать, пока вся его энергия не перейдет в тепло (попробуйте нарисовать фазовые траектории этих движений). Если же уронить на пол кусочек пластилина, то он останется в нижнем положении (какова фазовая траектория в этом случае?).

Точки покоя на фазовом портрете равномерно движущегося грузика, наоборот, неустойчивы. Если сообщить грузику небольшой импульс, то он начнет равномерно двигаться и в конце концов уйдет сколь угодно далеко от исходного положения. На фазовом портрете это будет выглядеть так, что точка $(s_0, 0)$ «перепрыгнет» на близкую фазовую траекторию и уйдет по ней сколь угодно далеко. В реальной системе (скажем, шайба на льду) этому мешает трение, но при очень малом трении шайба все равно улетит далеко, а при достаточно заметном трении нужно уже рисовать другой фазовый портрет, так как фазовые траектории не будут прямыми, параллельными оси Os (подумайте, как они могут выглядеть).

Фазовый портрет маятника

Как вообще в природе ни одно существо не походит на другое, так и закон колебаний одного колеблющегося тела не походит вполне на закон колебаний другого...

Л. Больцман

Набросав все эскизы, попробуем теперь нарисовать портрет маятника. Чтобы облегчить эту задачу, изобразим сначала его движения на энергетической диаграмме (рис. 4.9). Вспомним, что связь между угловой скоростью φ'

и углом отклонения φ определяется выражением для энергии (4.3), которое перепишем еще раз:

$$\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 l^2.$$

Если энергия равна нулю, то маятник покоится; график его движения — ось Ot , изображающая точка на энергетической диаграмме и на фазовой диаграмме — точка O .

Если $E/E_0 < 4$, то существует максимальное значение угла отклонения $\varphi_M < \pi$. Так как должно выполняться неравенство

$$\frac{E}{E_0} - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0,$$

то угол φ не может достигать значения π . Мы знаем, что при этом маятник колеблется между значениями угла отклонения $-\varphi_M$ и $+\varphi_M$. Движение это периодическое, хотя оно уже не описывается простой синусоидой и формула Гюйгенса не применима. (Вместо нее следует использовать более сложную формулу (4.2).) Графику этого движения (кривая 1 на рис. 4.9) соответствует на энергетической

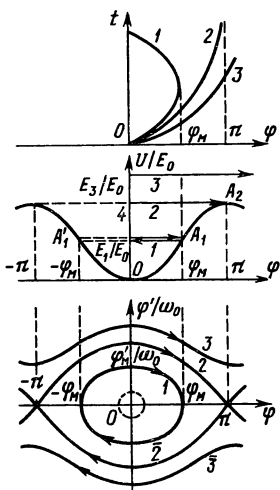


Рис. 4.9

диаграмме движение по кривой 1 до крайней точки A_1 , где кинетическая энергия и скорость равны нулю, а затем в обратном направлении до A'_1 , где точка «отражается» и снова движется в положительном направлении. Как и в случае гармонического движения, на фазовой диаграмме изображающая точка движется по замкнутой кривой «овальной» формы. Ее легко построить с помощью уравнения (4.3), выразив φ' через φ . Если амплитуда φ_M мала, то этот «овал» превращается в окружность, соответствующую синусоиде на графике движения.

При достаточно большой энергии, когда $E/E_0 > 4$, даже при максимальном значении потенциальной энергии $4 \sin^2(\varphi/2)$ (при $\varphi = \pi$ потенциальная энергия равна 4) кинетическая энергия $(\varphi')^2/\omega_0^2$ не равна нулю, и маятник проскакивает верхнюю точку. Теперь он совершает не колебательное, а *вращательное* движение. Это движение не равномерно, внизу скорость маятника максимальна, а в верхнем положении минимальна. На наших графиках это движение изображается кривыми 3. Если маятник вращается против часовой стрелки, значение угла φ неограниченно возрастает с ростом времени (фазовая траектория 3). Если он вращается по часовой стрелке, то значение угла неограниченно уменьшается (фазовая траектория $\bar{3}$).

Наиболее интересно для нас движение с энергией E , в точности равной $4E_0$. В этом случае закон сохранения энергии дает простое соотношение

$$\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} = 4 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Если маятник находится в верхнем положении, т. е. $\varphi = \pi$ или $\varphi = -\pi$, то его скорость равна нулю, и он может пребывать в состоянии покоя. График такого движения: $\varphi(t) = \pi$ при всех t , или $\varphi(t) = -\pi$ при всех t . На фазовой плоскости точки $\varphi = \pi$, $\varphi' = 0$ и $\varphi = -\pi$, $\varphi' = 0$ — это точки покоя (или точки равновесия). Ясно, что эти точки равновесия, в отличие от нижней точки равновесия маятника, неустойчивы. Если чуть-чуть увеличить полную энергию, скажем, резким движением слегка толкнуть маятник, то он начнет совершать вращательное движение. Если уменьшить полную энергию, скажем, медленно сдвинуть и опустить маятник, то он начнет совершать колебательные движения с амплитудой, близкой к π . В обоих случаях он далеко уходит от положения равновесия. Если бы мы проделали то же самое в нижнем положении равновесия, то ясно, что маятник начал бы колебаться около этого положения с небольшой амплитудой. Точка $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ на фазовой плоскости — устойчивая точка покоя.

При $E = 4E_0$ возможно и другое движение маятника. Пусть при $t = 0$ угловая скорость φ' равна $2\omega_0$. Тогда из формулы (4.3) следует, что $E/E_0 = 4$, и маятник движется к верхней точке равновесия так, что его скорость в положении φ равна

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (4.6)$$

Чем ближе φ к π , тем меньше скорость. Если угол отклонения очень близок к π , то удобно обозначить малый угол

отклонения $\pi - \varphi$ через 2α . Тогда $\cos(\varphi/2) = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha \approx \alpha$. Скорость изменения угла φ равна, очевидно, $-2\alpha'$. Поэтому между α' и α при малом значении угла α есть простое соотношение

$$\alpha' \approx -\omega_0 \alpha, \quad (4.7)$$

которое следует из (4.6) при малом значении $\pi - \varphi$.

Как мы увидим ниже, из этого уравнения следует, что маятник ни за какое конечное время не придет в верхнее положение равновесия. Для понимания качественного характера движений нам больше ничего и не нужно. Можно сразу нарисовать приблизительный вид графика движения с энергией $E = 4E_0$. Правда, наши рассуждения относились лишь к положительным значениям времени t , но левую часть кривой легко построить, вспомнив, что маятник качается совершенно симметрично относительно нижнего положения (для сравнения тонкой кривой изображено колебательное движение с энергией, меньшей $4E_0$). Эта симметрия приводит к тому, что энергетическая и фазовая диаграммы симметричны относительно вертикальной оси. Если в какой-то момент t маятник находится в положении $\varphi(t)$, то в момент $-t$ он находился в положении $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ (напомним, что время отсчитывается так, что в момент $t = 0$ маятник находится в нижнем положении, см. рис. 4.10). Фазовая диаграмма симметрична и относительно горизонтальной оси. Это

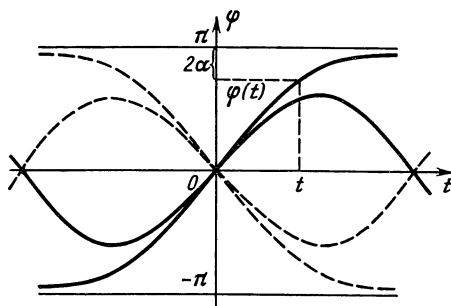


Рис. 4.10

значит, что всякому качанию слева направо, когда φ возрастает, соответствует точно такое же качание справа налево. График такого движения изображается кривой, симметричной относительно вертикальной оси (эти кривые изображены на рис. 4.10 штриховой линией).

Итак, мы нарисовали полный фазовый портрет маятника (рис. 4.9). Важную роль играют на нем кривые 2 и $\bar{2}$, кото-

рые отделяют фазовые траектории колебательных движений (кривая 1) от фазовых траекторий вращательных движений (кривые 3, $\bar{3}$) и называются *сепаратрисами* (от лат. *separo* — отделять). Эти кривые и соответствующие им графики движения играют, как мы скоро увидим, большую роль в теории солитонов. Форма солитона Френкеля и Конторовой (как и многих других солитонов) определяется кривой, совпадающей с графиком движения, соответствующим сепаратрисе. Чтобы у нас был по крайней мере один полностью описанный солитон, попытаемся получить решения уравнений (4.7) и (4.6) в виде формул. Для этого посвятим некоторое время показательной функции и некоторым другим связанным с ней функциям.

Показательная и гиперболические функции

В уравнении (4.7) можно узнать уравнение, описывающее радиоактивный распад, если считать $\alpha(t)$ массой нераспавшегося к моменту времени t радиоактивного вещества. Решение уравнения радиоактивного распада хорошо известно:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\omega_0 t}.$$

Здесь α_0 — начальное количество вещества, $\alpha(0) = \alpha_0$, основание натуральных логарифмов $e = 2,718281828\dots$ ($\log_e e \equiv \ln e = 1$)*). Мы получим сейчас это решение геометрически, придав показательной функции $e^{-\omega_0 t}$, которую записывают также в виде $\exp(-\omega_0 t)$, геометрический смысл, аналогичный геометрическому смыслу тригонометрических функций.

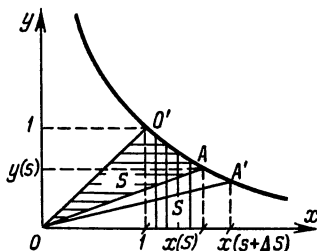


Рис. 4.11

Построим на плоскости (x, y) график гиперболы $y = 1/x$ и обозначим буквой S площадь криволинейного треугольника $OO'A$ (рис. 4.11). Тогда проекция точки A на ось OX и есть $x(S) = \exp(S)$. Это определение можно пояснить по-другому. Площадь $OO'A$ равна площади $O'Ax(S)1$, так как эти фигуры получаются вычитанием равновеликих треугольников $OAx(S)$ и $OO'1$ из одной и той же фигуры $OO'Ax(S)$. Площадь

*) В школьном курсе физики закон радиоактивного распада записывают в виде $\alpha/\alpha_0 = 2^{-t/T}$. Взяв натуральный логарифм обеих частей, получим $\ln(\alpha/\alpha_0) = -(t/T)\ln 2$. Обозначая $(1/T)\ln 2 = \omega_0$, получаем написанное нами выражение для $\alpha(t)$.

$O'Ax(S)$ 1 по обычному определению есть натуральный логарифм: $S = \log_e x(S) = \ln x(S)$, а $x(S) = \exp(S)$ — это просто обратная функция. Ясно теперь, что число e определяется условием $e = x(1)$.

Если точка A движется по гиперболе так, что площадь S равномерно растет со временем, т. е. $S = \omega_0 t$, то $x(S) = \exp(\omega_0 t)$, а $y(S) = 1/x(S) = \exp(-\omega_0 t)$. С помощью этого построения легко найти производную показательной функции. Площадь ΔS бесконечно малого прямоугольника $x(S)AA'x(S + \Delta S)$ равна $[x(S + \Delta S) - x(S)]y(S) = \Delta S$, откуда следует, что

$$[x(S + \Delta S) - x(S)]/\Delta S = 1/y(S) = x(S),$$

т. е. $\Delta(e^S)/\Delta S = e^S$. Когда $S = \omega_0 t$, то отсюда следует, что

$$\frac{\Delta(e^S)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \omega_0 e^{\omega_0 t},$$

т. е. $x' = \omega_0 x$. Точно так же $y' = -\omega_0 y$, и мы показали, что $y = \exp(-\omega_0 t)$ – решение уравнения (4.7). Самое общее решение можно получить, если взять $S = \omega_0(t + t_0)$, т. е. просто сдвинуть начало отсчета времени.

Аналогия с геометрическим определением тригонометрических функций $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ теперь должна быть ясной.

Они определялись как проекции на координатные оси точки, движущейся по окружности единичного радиуса. Поэтому площадь сектора, «заметаемого» радиусом, также равномерно нарастала со временем: $S = \omega_0 t$.

Еще ближе аналогия тригонометрических функций с гиперболическими функциями. Построим на таком же рисунке, как и (4.11), взаимно перпендикулярные оси OY и OX (рис. 4.12). Поделенные на $\sqrt{2}$ проекции $X(S)$ и $Y(S)$ точки A на эти оси называются *гиперболи-*

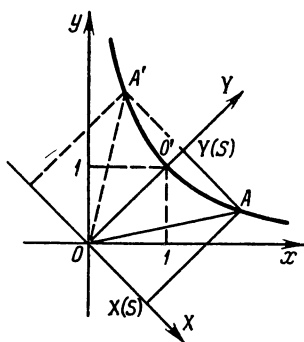


Рис. 4.12

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X(S) = \operatorname{sh} S, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}Y(S) = \operatorname{ch} S.$$

Эти функции похожи на $\sin S$ и $\cos S$. Ясно, что их легко выразить через $\exp(S)$ и $\exp(-S)$, но полезно знать и геометрическое определение. Из него сразу ясно, что $\operatorname{sh}(0) = 0$,

$\text{ch}(0) = 1$ (собственно, делитель $\sqrt{2}$ и использован для того, чтобы выполнялось последнее равенство). Ясно также, что обе функции неограниченно возрастают с ростом S . Кстати, легко определить эти функции для отрицательных значений S , если условиться считать площадь фигуры $OO'A'$ отрицательной и сохранить прежнее определение наших функций (то же самое можно сделать и с геометрическим определением показательной функции). Тогда сразу ясно, что

$$\text{sh}(-S) = -\text{sh } S, \quad \text{ch}(-S) = \text{ch } S.$$

Из построения, приведенного на рис. 4.13, видно, что для любой точки A , лежащей на гиперболе $y = 1/x$, выполнены соотношения

$$X(S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x(S) - \frac{1}{x(S)} \right],$$

$$Y(S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x(S) + \frac{1}{x(S)} \right].$$

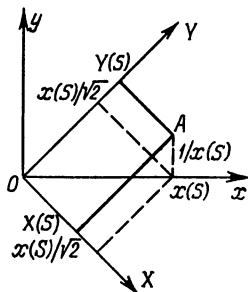


Рис. 4.13

Отсюда и получаем выражение гиперболических функций через показательные:

$$\text{sh } S = \frac{1}{2}(e^S - e^{-S}), \quad \text{ch } S = \frac{1}{2}(e^S + e^{-S}). \quad (4.8)$$

С помощью предыдущей формулы легко доказать, что отрезки $X(S)O'$ и $X(S)A$ на рис. 4.12 равны (докажите!). Это условие дает простой способ построения гиперболы по точкам с помощью циркуля и линейки (постройте гиперболу этим способом!). Из него также следует, что $\text{ch}^2 S - \text{sh}^2 S = 1$ (докажите!). Последнее соотношение можно, конечно, просто вывести из формул (4.8), которые обычно и принимают в качестве определения гиперболических функций.

Исходя из геометрического определения, можно найти все основные свойства показательной и гиперболических функций. Самое главное свойство показательной функции, которое можно было бы взять за определение, выражается очень просто: $e^{S_1 + S_2} = e^{S_1} \cdot e^{S_2}$. Доказывается оно геометрическим рассуждением, провести которое мы предлагаем читателю.

«Солитонное» решение уравнения маятника

Найдем теперь геометрическим построением решение уравнения (4.6). Обозначим $\angle O'OA = \varphi/4$ и $\angle AOx = \psi$ (рис. 4.14). Очевидно, что $\psi = (\pi - \varphi)/4$ и $\text{tg } \psi =$

$= \exp(-S)/\exp(S) = \exp(-2S)$. Приращение площади ΔS при малом смещении точки A по гиперболе можно записать как площадь малого сектора с радиусом $(OA) \approx (OA')$ и углом $-\Delta\psi = \angle AOA'$, т. е. $\Delta S = -\frac{1}{2} \Delta\psi \cdot (OA)^2$. Так как $(OA) = \exp(S)/\cos \psi$, то отсюда следует,

$$\begin{aligned} \text{что} \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta S} &= -\frac{2}{(OA)^2} = -2e^{-2S} \cos^2 \psi = \\ &= -2 \operatorname{tg} \psi \cdot \cos^2 \psi = -\sin 2\psi. \end{aligned}$$

Возвращаясь к углу φ , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} &= 4 \sin 2\psi = 4 \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) = \\ &= 4 \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы получить отсюда уравнение (4.6), достаточно положить $S = \frac{1}{2} \omega_0 t$. Тогда $\varphi' = 2 \omega_0 \cos(\varphi/2)$, а условие $\operatorname{tg} \psi = \exp(-2S)$ дает

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = e^{-\omega_0 t}. \quad (4.9)$$

Мы показали, что угол $\varphi(t)$, зависимость которого от t определена этим уравнением, удовлетворяет уравнению (4.6). Общее решение уравнения (4.6) можно найти сдвигом начала отсчета времени, т. е. заменой в формуле (4.9) t на $t + t_0$. Если угол φ близок к π , то для $\alpha = (\pi - \varphi)/4$ получим из

(4.9), что $\alpha = \exp(-\omega_0 t)$ (так как $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$). Таким образом, α удовлетворяет уравнению (4.7).

Найденное решение описывает особое движение маятника. На фазовом портрете оно соответствует сепаратрисе, идущей из точки $-\pi$ при $t \rightarrow -\infty$ в точку $+\pi$ при $t \rightarrow +\infty$. Описанным здесь способом его мог бы получить и Ньютон, но найдено оно было значительно позже, а интересные для

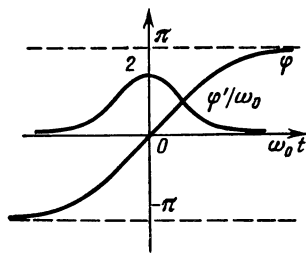


Рис. 4.15

физики приложения это решение получило после работы Френкеля и Конторовой.

Для теории солитонов формула (4.9) столь важна, что мы перепишем ее еще раз, выразив φ непосредственно через t :

$$\varphi = \pi - 4 \operatorname{arctg}(e^{-\omega_0 t}). \quad (4.10)$$

Когда t растет от $-\infty$ до $+\infty$; $\exp(-\omega_0 t)$ убывает от $+\infty$ до 0; при этом $\operatorname{arctg}[\exp(-\omega_0 t)]$ пробегает значения от $\pi/2$ до 0 и φ меняется от $-\pi$ до π . С помощью формулы (4.9) можно найти $\varphi' = 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$ как функцию времени. Это несложное упражнение на преобразование тригонометрических функций мы предоставим читателю:

$$\varphi' = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)} = \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (4.11)$$

Так как формулы (4.10) и (4.11) чрезвычайно важны для теории солитонов, с ними надо хорошо освоиться. На рис. (4.15) изображены функция $\varphi(t)$, определяемая формулой (4.10), и функция $\varphi'(t)/\omega_0$, определяемая формулой (4.11). Эти две замечательные и простые функции стоит как следует изучить и запомнить. Их нетрудно построить с помощью тригонометрических таблиц и таблиц логарифмов, а еще лучше воспользоваться микрокалькулятором.

Движения маятника и «ручной» солитон

Качественный характер изученных нами движений маятника полезно изучить на простых опытах. Проще всего сделать это с помощью обычного велосипедного колеса. Перевернув велосипед, можно сделать из переднего колеса неплохой маятник, способный совершать колебательные и вращательные движения. Для этого прикрепим на ободе кусочек пластилина или какой-либо иной грузик. Если колесо не сбалансировано, лучше его сначала сбалансировать, так чтобы оно могло покоиться в любом положении. Внешняя сила, действующая на колесо, определяется только дополнительным грузиком, а в движении участвует вся его масса.

Чтобы оценить период движения колеса, приближенно заменим его однородным тонким обручем с радиусом, примерно равным расстоянию l от центра до внутренней части обода, и с массой, примерно равной массе всего колеса M . Приложенная сила равна $-mg \sin \varphi$, а ее момент равен $-mgl \sin \varphi$, где m — масса дополнительного грузика, а φ — угол отклонения его от вертикали, отсчитываемый точно так же, как и для обычного маятника. Мысленно разделим обруч на n одинаковых маленьких частей. Если к каждой приложить силу $-(1/n)mg \sin \varphi$, направленную по касательной к обручу, то приложенный полный момент силы равен $-mgl \sin \varphi$, так что такое «разделение» внешней силы допустимо. Для каждой маленькой части легко написать уравнение дви-

жения

$$(1/n) M l \varphi'' = -(1/n) m g \sin \varphi,$$

поскольку все части движутся как целое и их ускорения одинаковы.

Таким образом, мы получили уравнение, совпадающее с уравнением движения обычного маятника $\varphi'' = -\omega_0^2 \sin \varphi$, но теперь $\omega_0^2 = mg/Ml$. Этот вывод не зависит от сделанных приближений, приближенным получилось лишь выражение для ω_0^2 (в точной формуле вместо Ml надо подставить I/l , где I — момент инерции колеса; для обруча $I = Ml^2$).

На этом простом приборе можно изучить все движения, которые были рассмотрены выше. Нужно только помнить, что трение приводит к затуханию колебаний, закон сохранения энергии становится приближенным и фазовый портрет маятника при наличии трения существенно изменяется (попробуйте показать, что для линейного маятника с трением окружности на фазовой плоскости переходят в спирали, накручивающиеся на точку $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$).

На велосипедном колесе легко установить изохронность малых и неизохронность больших колебаний. Нетрудно также найти зависимость периода колебаний от амплитуды и установить качественный характер любых движений.

Однако построить экспериментальные графики движений не очень просто. Самый удобный способ — сделать киносъемку движений колеса, но это уже достаточно дорогостоящий опыт. Замечательно, что зависимость угла от времени для самых разных движений можно определить на опыте с помощью очень простой системы, которая, на первый взгляд, не имеет ничего общего с маятником.

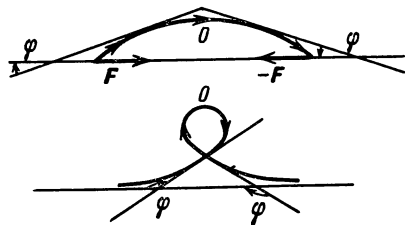


Рис. 4.16

Возьмем тонкую и достаточно длинную стальную проволочку. Она должна легко гнуться без заметной остаточной деформации. Если ее положить на стол и слегка сжать на концах, она

примет форму полусинусоиды, как указано в верхней части рис. 4.16. Проведем касательные к получившейся кривой и будем отсчитывать угол φ , как указано на рисунке. Длину дуги s на кривой будем отсчитывать от точки O , причем слева $s < 0$, а справа $s > 0$. Если на проволочке сделать петельку, как указано в нижней части рис. 4.16, то

угол будет принимать значения от $-\pi$ до $+\pi$, если считать проволочку бесконечно длинной. При этом зависимость φ от s описывается формулой (4.10), в которой вместо t надо подставить s , а ω_0 определяется силой F , действующей на проволочку. Если проволочка бесконечно длинная, то петелька может располагаться в любом месте, она может свободно перемещаться вдоль проволочки. Эта петелька и есть простейшая модель солитона. Назовем этот солитон «ручным».

С движениями маятника связаны любые формы изгиба проволочки. Каждой зависимости $\varphi(s)$ от s можно поставить в соответствие некоторое движение маятника. Эта замечательная аналогия называется аналогией Кирхгофа в честь открывшего ее знаменитого немецкого физика Густава Кирхгофа (1824 – 1887)*). На самом деле он нашел гораздо более широкую аналогию между состояниями деформированных упругих тел и движениями твердого тела. К сожалению, о ней сегодня совершенно незаслуженно забыли. Мы немного поговорим о ней после того, как познакомимся с солитоном Френкеля.

Заключительные замечания

Метод необходим для отыскания истины.

Р. Декарт

Мы заканчиваем самую трудную главу в этой книге, главное содержание которой – основные идеи теории нелинейных колебаний, изложенные на простейших, но не тривиальных примерах. Читателю, желающему понять, как устроены солитоны, необходимо ясно представлять себе линейные и нелинейные колебания маятника. Особенно хорошо нужно понять энергетические соотношения и движения, фазовые траектории которых – сепаратрисы (формулы (4.10), (4.11) и рис. 4.15). Эти решения позволяют нам понять с помощью простых аналогий очень важные солитоны. Один из примеров – ручной солитон, который связан с асимптотическим движением маятника аналогией Кирхгофа.

И я больше всего дорожу аналогиями,
моими самыми верными учителями.

И. Кеплер

Метод физических аналогий и моделей, которым с таким успехом пользовались великие физики прошлого века, и сегодня сохраняет ценность. Особенно плодот-

*) Формы изгиба упругой проволочки первым изучил Леонард Эйлер. Их называют «эластиками Эйлера».

творен он в теории колебаний, волн и солитонов, где одни и те же уравнения описывают множество совершенно различных систем. Можно высказать некоторые общие принципы получения таких аналогий. Пусть состояния двух систем определяются одинаковым числом переменных, или, как говорят, обобщенных координат (например, угол φ для маятника, заряд конденсатора Q в колебательном контуре и т. д.). Предположим, что энергии этих систем E_1 и E_2 сохраняются и что посредством некоторого переобозначения обобщенных координат и параметров, характеризующих системы (массы, емкости, индуктивности и т. д.), можно сделать величины E_1 и E_2 одинаковыми функциями координат (с точностью до постоянного множителя). Тогда ясно, что системы полностью аналогичны, и между их «движениями», каков бы ни был их смысл, можно установить полное соответствие.

Правда, здесь есть некоторые тонкости. Например, новые обобщенные координаты, от которых энергии зависят одинаково, могут изменяться в разных пределах. Более существенная тонкость связана с тем, что для систем разной природы нас могут интересовать разные задачи. Если между системами имеется точная аналогия, то их обобщенные координаты удовлетворяют одинаковым уравнениям движения. (Собственно, это и есть определение точной аналогии, просто иногда удобнее иметь дело с энергией.) Однако мы знаем, что для определения конкретного движения нужно задать некоторые дополнительные условия, например, начальные значения координаты и скорости.

Рассмотрим с этой точки зрения аналогию Кирхгофа. Выше упоминалось о точном соответствии между движением маятника и формой изгиба упругой проволоочки (эластика Эйлера). В следующей главе будет показано, что для определения эластичности Эйлера нужно решить уравнение маятника $\varphi'' = -\omega_0^2 \sin \varphi$. Однако в этом случае задача ставится совсем не так, как в теории маятника. Аналог времени здесь — длина дуги эластичности s , а длина проволоочки l фиксирована, так что $-1/2 l \leq s \leq 1/2 l$. Нам нужно найти форму проволоочки, т. е. $\varphi(s)$ при заданной внешней силе F . Как мы увидим ниже, величина ω_0^2 пропорциональна F . Если пользоваться аналогией с маятником, то нужно решить довольно странную задачу: найти все возможные движения маятника от «момента» $-1/2 l$ до «момента» $+1/2 l$ и изучить зависимость этих движений от ω_0^2 . Для эластичности естественно возникают и другие задачи, например, как найти ее наиболее устойчивую форму, т. е. форму, для которой запасенная в проволочке упругая энергия минимальна. Эти задачи существенно

сложнее задач, обычно решаемых в теории маятника, и знакомство с аналогичными, но более просто определяемыми движениями маятника очень помогает при их решении.

Полезны не только точные, но и приближенные аналогии. Типичный пример приближенной аналогии — соотношение между обычным и циклоидальным маятником. Приближенной аналогией следует пользоваться с большей осторожностью, чем точной. Например, при достаточно больших амплитудах колебания обычного и циклоидального маятников становятся качественно различными. Более удачна качественная аналогия маятника грузику на кривой $y = a[1 - \cos(x/b)]$ в поле силы тяжести, направленной по оси y (грузик в желобе). Введя обозначение $\varphi = x/b$, можно проверить, что малые колебания маятника вблизи точки $\varphi = 0$ соответствуют малым колебаниям маятника с длиной $l = b^2/a$ и что для этих двух систем фазовые портреты качественно сходны. На математическом языке можно сказать, что они *топологически эквивалентны**). Простой пример такой эквивалентности — изображение нашего лица в кривом зеркале «комнаты смеха».

Топологическую эквивалентность фазовых портретов можно было бы положить в основу определения *качественной эквивалентности*. Однако с этим связана еще одна тонкость. Все изучаемые в физике модели реальных систем описывают их реальное поведение лишь с какой-то степенью точности. Любая математическая модель физического явления получается упрощением, или идеализацией, реальной системы. Чем сложнее система, тем серьезнее эти упрощения.

Как говорил Я. И. Френкель, «физик-теоретик... подобен художнику-карикатуристу, который должен воспроизвести оригинал не во всех деталях, подобно фотографическому аппарату, но упростить и схематизировать его таким образом, чтобы выявить и подчеркнуть наиболее характерные черты. Фотографической точности можно — и следует — требовать лишь от теоретического описания простейших систем. Хорошая теория сложных систем должна представлять лишь хорошую «карикатуру» на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типическими, и умышленно игнорирующую все остальные — несущественные свойства... Хорошая карика-

*) Топологически эквивалентные фазовые портреты легко получить, нарисовав какой-нибудь фазовый портрет на резиновой пленке. Любой портрет, который получается растягиванием пленки без разрывов, топологически эквивалентен исходному. При этом замкнутые кривые остаются замкнутыми, непересекающиеся кривые остаются непересекающимися и т. д.

тура на какого-либо человека не может существенно улучшиться от более аккуратного и точного изображения нехарактерных деталей его лица и фигуры»^{*)}). Так вот, основная тонкость состоит как раз в том, чтобы выделить эти наиболее характерные черты.

Когда мы хорошо понимаем вопрос, нужно освободить его от всех излишних представлений, свести его к простейшим элементам.

Р. Декарт

Без отбрасывания несущественных подробностей вообще нельзя было бы найти физические законы. Первым это понял Галилей, который и считается основателем современного научного метода в физике. Яркий пример силы метода «окарикатуривания» явления — открытие Галилеем закона инерции, который обычно называют первым законом Ньютона (сам Ньютон приписывал первые два «закона Ньютона» Галилею). Первая часть закона инерции Галилея была известна уже великому философу древности Аристотелю из Стагира (384 — 322 гг. до н. э.): «ни одно тело не переходит из состояния покоя в состояние движения без действия какой-либо силы». Представить себе, что равномерное и прямолинейное движение может происходить без действия какой-либо силы (в этом смысле состояние покоя эквивалентно состоянию равномерного прямолинейного движения), ни Аристотель, ни его последователи не могли. Увидеть это на опыте нельзя, как невозможно и доказать логическими рассуждениями. Поэтому открытие Галилеем закона инерции и связанного с ним принципа относительности — одно из величайших достижений человеческого интеллекта и воображения, а работу, которая привела к этому открытию, справедливее сравнить не с работой карикатуриста, но с творческим порывом поэта: «Сотри случайные черты — и ты увидишь: мир прекрасен» (А. Блок).

Приближенное представление об идеальном движении дает скольжение конькобежца по льду (автору, правда, неизвестно, знал ли Галилей, что такое коньки). Можно представить себе, что действие силы тяжести уравнивается реакцией со

^{*)} Чтобы вполне оценить это высказывание, надо знать, что Я. И. Френкель с детства и до конца жизни помимо физики увлекался живописью. Выполненные им портреты друзей и знакомых обычно передают наиболее существенные черты оригинала, хотя и не являются карикатурами. Может быть, лучше вспомнить не о карикатурах, а о рисунках Пушкина или Пикассо, которые несколькими штрихами удивительно точно передают внутреннюю сущность изображаемого человека.

стороны льда (видимо, у Галилея было об этом некоторое представление). Чтобы получить теперь картину идеального состояния равномерного и прямолинейного движения, необходимо еще мысленно исключить силы трения. Галилей сумел сделать этот последний шаг, хотя он и не изучал силы трения на опыте.

Ясное понятие о сопротивлении среды, о силах трения впервые появилось в «Началах» Ньютона, который наблюдал качания маятника в сопротивляющейся среде. Он рассмотрел влияние силы трения, пропорциональной скорости тела, квадрату скорости тела, а также постоянную силу трения. В шестом разделе второй книги «Начал» Ньютон доказывает несколько теорем о качаниях маятника в сопротивляющейся среде. Замечательна своей простотой и очень важна теорема 21: «Качания маятников по циклоиде в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости, изохронны» (попробуйте доказать эту теорему).

С помощью полученных теорем Ньютон попытался на опыте определить зависимость силы сопротивления от скорости: «Я подвесил к прочному крюку на тонкой нити деревянный шар, вес коего был $57\frac{7}{22}$ римских унций*) и диаметр $6\frac{7}{8}$ английских дюйма, так что расстояние между крюком и центром качания шара было $10\frac{1}{2}$ фута; на нити я отметил точку на расстоянии в 10 футов 1 дюйм от центра подвеса, и против этой точки я установил линейку, разделенную на дюймы, по которой я и замечал длины дуг, описываемых маятником. Затем я сосчитывал число размахов, после которого маятник утрачивал восьмую часть величины своего размаха...» Сравнивая результаты наблюдений с доказанными теоремами, Ньютон пришел к выводу, что «сопротивление шара, когда он движется быстрее, пропорционально квадрату скорости, когда же медленнее, то — немного более, нежели первой ее степени».

Опыты Ньютона были повторены в 1915 г. по предложению А. Н. Крылова, в переводе которого мы цитировали «Начала». Хотя методика Ньютона была заметно улучшена, его качественные результаты подтвердились. Однако, пользуясь столь несовершенными методами, трудно было установить количественные законы трения при движении тел в жидкостях и газах. Основные законы трения качения и скольжения твердых тел были установлены на опыте почти через сто лет после выхода в свет «Начал» работами Шарля Огюстена Кулона (1736—1806), наиболее известного открытием закона притяжения электрических зарядов, сделанного независимо от Кавендиша, по обыкновению не опубликовавшего свои результаты.

Чем все это интересно и важно? Наиболее важно, что идеализация явления привела к установлению общих законов. После того как законы установлены, можно выделить и понять «внешние силы», которые приводят к видимому нарушению этих законов. В резуль-

*) Римская унция равна примерно 31,1 г.

тате — совершенно новый уровень понимания явлений: «Познай, где свет, — поймешь, где тьма!» (А. Блок)

Интересен также ход мысли Ньютона. Изложение его, конечно, несовременно, и за деталями рассуждений следить трудно, но общий подход к проблеме не отличается от подхода современного физика. В современных курсах теоретической физики трение вводят, руководствуясь практически такими же соображениями, какими пользовался Ньютон, только обычно ограничиваются трением, пропорциональным скорости, чтобы не слишком сильно «испортить» общие законы. Силы трения здесь действительно выглядят «случайными чертами», которые нужно «стереть». Галилей и Ньютон оставили нам образцы такой работы мысли, выявляющей скрытую красоту законов природы.

Следуя их примеру, мы без стеснения отбросили силы трения при анализе нелинейных колебаний. Оправдано это? Может показаться, что нарисованный нами портрет маятника — лишь скверная карикатура реального маятника. Действительно, что произойдет с портретом на рис. 4.9, если включить даже очень малую силу трения? Замкнутые линии 1, соответствующие колебательному движению, разорвутся и превратятся в спирали, накручивающиеся на точку O . Сепаратриса 2 оторвется от точки $(\pi, 0)$ и тоже начнет накручиваться на O . Сепаратриса $\bar{2}$ оторвется от точки $(-\pi, 0)$ и т. д. Короче, портрет маятника с трением топологически не эквивалентен портрету маятника без трения. Так что же? Выходит, трение нельзя признать случайной и нехарактерной чертой движений маятника? Не будем спешить с ответом.

Поразмыслив еще немного, можно увидеть, что рисование портрета «идеального» маятника все же не было пустым занятием. Во-первых, при малом трении фазовые траектории реального маятника достаточно близки к идеальным. Во-вторых, и это самое главное, при описании солитонов нам встретится уравнение маятника без всяких добавок, подобных силам трения. Иными словами, для теории солитонов важна аналогия не с реальным, а с идеальным маятником. Как мы скоро увидим, солитон Френкеля — Конторовой, как ручной солитон и многие другие, описывается асимптотическими движениями маятника, фазовые траектории которых — сепаратрисы 2 и $\bar{2}$. Поэтому с точки зрения теории солитонов трение в реальном маятнике, действительно, нехарактерно и случайно, а портрет идеального маятника — очень удачная карикатура. Добавление «нехарактерной детали» — трения — не только не улучшает ее, но катастрофически портит, уничтожая самое важное.

Наконец, последнее замечание. Для описания движений маятников было использовано некоторое количество математики. Необходимо ли это? Если бы нас интересовали лишь движения реальных маятников, можно было бы обойтись законом сохранения энергии, простыми геометрическими соображениями и здравым смыслом, почерпнутым из простых наблюдений. Для понимания наиболее интересных асимптотических движений этого, однако, мало, и знание математического языка хотя бы в объеме этой главы реально необходимо. О мере, в какой оно необходимо, хорошо сказал

Л. И. Мандельштам в «Лекциях по колебаниям». Изложив «без всякой математики» простую картину описания колебаний грузика в желобе на языке сохранения энергии, он продолжает: «В такой простой картине все следует из наглядности. Зачем же мы проделали в прошлый раз ряд математических выводов? Дело в том, что «житейские» разговоры, в сущности, грешат в одном месте. Пусть кинетическая энергия грузика меньше максимальной потенциальной. Мы знаем, что в таком случае грузик должен остановиться. Но уверены ли мы, что он дойдет до точки остановки за конечное время? Ведь только при этом условии можно говорить о периодическом движении с конечным периодом. А что будет в случае лимитационного движения*)? Может быть, и в этом случае частица доходит до крайнего положения за конечное время? Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинаящему часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что «и так все ясно». Но в действительности какой-нибудь пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру». Будем надеяться, что нам это удалось, и попробуем в том же духе подойти к изучению волн.

Глава 5

От маятников — к волнам и солитонам

Певучесть есть в морских волнах
Гармония в стихийных спорах.

Ф. Тютчев

Наглядный образ волн на поверхности воды всем хорошо известен, однако эти волны представляют собой очень сложное явление, и для первого знакомства лучше найти хорошую «карикатуру». Именно так поступил Ньютон, предложивший простую модель распространения звуковой волны. Основная идея Ньютона сводилась к тому, что при распространении волны каждая частица среды колеблется подобно маятнику и движение каждой частицы влияет на движение всех окружающих ее частиц (ближайших соседей).

Дальнейшее упрощение состоит в том, что частицы, которые могут двигаться и одновременно деформироваться, Ньютон заменяет массивными грузиками, соединенными упругими пружинками, лишенными массы. Тогда кинетическая энергия частицы среды сосредоточена на грузиках, а потенциальная

*) Это то же самое, что движение по сепаратрисе (см. (4.10)).

энергия упругой деформации частицы запасается в пружинах. (Рассуждения Ньютона здесь, конечно, модернизированы, но ход его мыслей передается достаточно точно.) Даже после этих серьезных упрощений модель реальной трехмерной среды все еще слишком сложна. Следующий шаг приводит к задаче, которая решается точно.

Волны в цепочке связанных частиц

Рассмотрим цепочку одинаковых частиц с массой m , соединенных упругими пружинками и движущихся по прямой. Физики называют эту систему *моделью одномерного кристалла*. Условимся поэтому называть частицы «атомами». Кавычки напоминают о том, что эти «атомы» пока не имеют никакого отношения к реальным физическим атомам. В дальнейшем мы их опускаем.

Пусть длина каждой пружинки в недеформированном состоянии равна a . Тогда покоящиеся атомы, перенумерованные, как указано на рис. 5.1, будут располагаться в точках

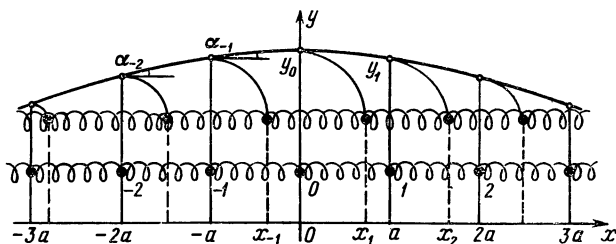


Рис. 5.1

с координатами na , т. е. равновесное положение n -го атома определяется координатой $x_n^0 = na$. Допустим теперь, что атомы отклонены от равновесного положения, так что координата n -го атома равна x_n (верхнее положение). Обозначим отклонение атома от равновесного положения буквой $y_n = x_n - x_n^0 = x_n - na$ и отложим отрезки y_n над соответствующими точками $x_n^0 = na$. Соединив их плавной кривой, получим график, изображающий отклонения атомов от положений равновесия.

Плавная кривая получится, конечно, не всегда. Если отклонения каких-нибудь соседних атомов отличаются достаточно сильно, то у кривой будут резкие изломы. Мы поэтому предположим, что наклон графика отклонений очень медленно

меняется, т. е. разность двух последовательных углов α_n по модулю много меньше самих углов.

При этом получится плавная кривая, мало изменяющаяся на расстоянии a , и наша модель будет достаточно точно воспроизводить смещения частицы в непрерывной (сплошной) среде. Другими словами, если мы хотим на модели воспроизвести распространение волны в сплошной среде (упругая волна в стержне, звуковая волна в органной трубе, волна на скрипичной струне и т. д.), нужно брать частички малыми и располагать их на малых расстояниях друг от друга. Сверх этого, длина волны λ должна быть много больше расстояния между атомами.

Картину распространения волн в такой цепочке можно изучать на очень простом устройстве, для изготовления которого нужна хорошая и достаточно длинная плоская резиновая лента и большие скрепки (см. рис. 5.2). Разумеется, эта система гораздо сложнее, чем идеальная одномерная цепочка, и к тому же очень несовершенна. Главный ее недостаток — большие потери на трение в резине. Достоинство ее —

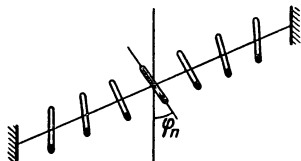


Рис. 5.2

небольшая скорость распространения волн. Это позволяет наблюдать бегущие по цепочке волны невооруженным глазом. Скорость распространения возбуждений можно изменять, утяжеляя скрепки. Интуитивно ясно, что с увеличением массы скрепок эта скорость должна уменьшаться.

Если скрепки закреплены на ленте в их центрах тяжести, так что сила тяжести не создает дополнительного вращательного момента, действующего на скрепки, то эта система вполне аналогична линейной цепочке. При этом угол φ_n аналогичен отклонению u_n , а роль массы груза играет момент инерции скрепки. Вместо возвращающей упругой силы нужно рассматривать момент упругой силы, возникающий при скручивании резинки. Короче, аналогия здесь такая же, как аналогия колебаний груза на пружинке и крутильных колебаний.

Еще одно существенное отличие нашей грубой модели от идеальной бесконечной цепочки связано с отражением волн от границ. Это происходит примерно так, как указано на рис. 5.3, где изображены графики отклонений грузиков или скрепок в последовательные моменты времени. Горбку соответствует смещение грузиков в положительном направлении оси x , впадине — в отрицательном. Когда горбик подходит к стенке, крайняя, закрепленная пружина начинает тянуть

крайний грузик влево, он тянет соседние грузики, и в результате направо побежит впадина.

Если вместо продольных движений грузиков изучать их поперечные движения (в направлении оси y в плоскости xu), то графики рис. 5.3 изображают форму поперечного импульса в цепочке. Наблюдать такие импульсы и волны можно с помощью мягкой и достаточно длинной резиновой трубки. Прodelать соответствующие простые опыты несложно, и читатель может проявить здесь фантазию и изобретательность.

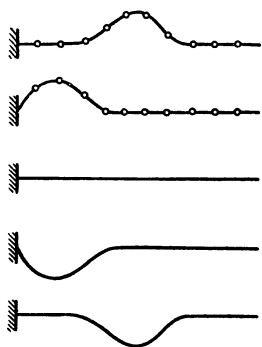


Рис. 5.3

В резиновой трубке или ленте, закрепленных на концах, легко возбуждать *стоячие волны*. Особенно легко возбуждается колебание, в котором нетрудно узнать «полусинусоиду». При этом все точки колеблются в одинаковой фазе, и амплитуда колебаний максимальна в середине («пучность» стоячей волны). Длина такой стоячей волны равна удвоенной длине ленты*). Труднее возбудить колебание, в котором остается в покое середина («узел» стоячей волны). На всей ленте при этом укладывается «период синусоиды», и длина волны равна длине ленты. Чтобы возбудить такое колебание, нужно оттянуть ленты в противоположные стороны на равных расстояниях от краев, удерживая середину в покое. Легче наблюдать такую волну на приборчике со скрепками. Возбудив какие-либо колебания в этой цепочке (лучше всего это делать быстрым, легким щелчком по скрепке), можно просто остановить среднюю скрепку. При этом «выживет» колебание, в котором средняя скрепка покоится.

Стоячие волны разных типов, в которых на всей длине ленты укладывается разное число N полуволн, называются *нормальными модами* колебаний (или просто *модами*; это слово происходит от латинского *modus*, т. е. образ, способ). Моды с малыми значениями N называются *низшими*, а с большими — *высшими*. Моду с $N = 1$ естественно называть основной, она возбуждается легче всего. При произвольном начальном возбуждении нашей системы возбуждаются разные

*) Ниже мы увидим, что синусоидальную стоячую волну можно представить в виде суммы двух одинаковых волн, бегущих в противоположных направлениях. Длина стоячей волны, по определению, совпадает с длиной этих бегущих волн.

моды, однако высшие моды не только труднее возбуждаются, но и быстрее затухают из-за трения. Потому-то их и труднее наблюдать.

Понять, что такое моды и как они себя ведут, проще всего на модели одномерной цепочки конечной длины с закрепленными концами. Сначала посмотрим, как колеблется простейшая цепочка из двух атомов. Пусть их равновесные положения равны $x_1^0 = a$ и $x_2^0 = 2a$, а крайние пружинки закреплены в точках $x_0^0 = 0$ и $x_3^0 = 3a$ (см. рис. 5.1). Легко составить уравнения движения атомов.

Прежде чем это сделать, введем одно небольшое новшество в обозначениях. До сих пор нам приходилось иметь дело лишь с производными по времени, и мы их обозначали штрихом. При изучении колебаний в распределенных системах встречаются не только производные по времени, с помощью которых записываются скорости и ускорения отдельных частиц, но и производные по координате. Они характеризуют изменение отклонения при переходе от одной частицы к другой в один и тот же момент времени. Поэтому условимся обозначать производную по времени не штрихом, а точкой, а штрих сохраним для производной по координате. Теперь мы будем обозначать скорость n -го груза как \dot{y}_n , а его ускорение — как \ddot{y}_n .

Уравнения движения грузов можно тогда написать в виде

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2 - y_1), \quad m\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - ky_2. \quad (5.1)$$

Действительно, сила, с которой левая пружина тянет первый грузик, равна произведению модуля упругости k на удлинение пружины y_1 , и при $y_1 > 0$ это сила направлена в отрицательном направлении оси x . Так получается член $-ky_1$ *). Удлинение правой пружины равно $(y_2 - y_1)$, и она тянет грузик с силой $k(y_2 - y_1)$. Это дает второй член в правой части первого уравнения. Точно так же находим силу, действующую на второй грузик.

На первый взгляд может показаться, что решить эти уравнения очень сложно. Однако они линейны, а это значит, что достаточно найти лишь некоторый запас решений. Их линейные комбинации, возможно, и дадут самое общее решение.

Для начала попробуем получить хоть какие-нибудь решения. В этом нам поможет физическая интуиция. Действительно, вслед за Ньютоном мы представляем себе простей-

*) Предполагается, что упругие свойства пружины соответствуют закону Гука. Нелинейность зависимости силы от отклонения вводится с помощью других, дополнительных источников силы.

шую бегущую волну как процесс распространения гармонического колебания от одной частицы к другой. Тогда стоячая волна — это просто установившиеся колебания всех частичек с разными амплитудами. Сделаем простейшее предположение: допустим, что все частицы колеблются гармонически и притом с одинаковой частотой ω , и посмотрим, что отсюда следует.

Для гармонических колебаний ускорение пропорционально отклонению, т. е. $\ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1$ и $\ddot{y}_2 = -\omega^2 y_2$. Подставляя это в уравнения (5.1), получаем простую линейную систему уравнений для y_1 и y_2 :

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)y_1 + \omega_0^2 y_2 = 0, \quad \omega_0^2 y_1 + (\omega^2 - 2\omega_0^2)y_2 = 0. \quad (5.2)$$

Здесь $\omega_0^2 = k/m$, а ω — не определенная пока частота наших гипотетических колебаний.

Ясно, что у этой системы уравнений относительно неизвестных y_1 и y_2 есть неинтересное решение $y_1 = y_2 = 0$. Пусть $y_1 \neq 0$. Тогда, выражая y_2 через y_1 из первого уравнения и подставляя полученное выражение во второе уравнение, найдем, что должно выполняться условие

$$[(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - \omega_0^4] y_1 = 0. \quad (5.3)$$

Так как $y_1 \neq 0$, то выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю*). Решая квадратное уравнение для ω^2 , определяем два возможных значения частоты

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{3} \omega_0. \quad (5.4)$$

Если $\omega = \omega_1$, то из уравнений (5.2) следует, что $y_2 = y_1$. Если $\omega = \omega_2$, то $y_2 = -y_1$. Вспомним теперь, что y_1 и y_2 подчиняются уравнениям $\ddot{y}_n = -\omega^2 y_n$, которые определяют их гармоническую зависимость от времени. При $\omega = \omega_1 = \omega_0$ можно поэтому записать решение в виде

$$y_1 = y_2 = A_1 \cos [\omega_1 (t - t_1)], \quad (5.5a)$$

а при $\omega = \omega_2 = \sqrt{3} \omega_0$ — в виде

$$y_1 = -y_2 = A_2 \cos [\omega_2 (t - t_2)]. \quad (5.5b)$$

Здесь A_1 и A_2 — произвольные амплитуды, а t_1 и t_2 — произвольные значения времени, определяющие фазу колебаний.

Эти два решения и дают две возможные моды колебаний нашей простейшей системы (рис. 5.4). Они соответствуют

*) Если хотя бы в один момент времени $y_1 \neq 0$, то множитель в квадратных скобках, не зависящий от времени, должен обращаться в нуль.

двум нижшим модам колебаний резинки, изображенным на рисунке штриховыми линиями. Конечно, это соответствие несколько условно, но, согласитесь, от карикатуры, сделанной двумя точками, нельзя требовать большего!

Теперь можно снова воспользоваться линейностью уравнений (5.1) и написать решение в виде суммы решений (5.5а) и (5.5б):

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos [\omega_1 (t - t_1)] + \\ &\quad + A_2 \cos [\omega_2 (t - t_2)], \\ y_2 &= A_1 \cos [\omega_1 (t - t_1)] - \\ &\quad - A_2 \cos [\omega_2 (t - t_2)]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

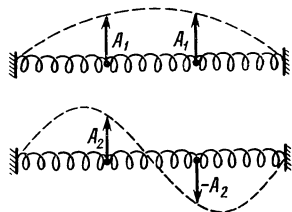


Рис. 5.4

Это движение уже не сводится к простому гармоническому колебанию каждой из частиц. В общем случае, т. е. при произвольных значениях A_1 , A_2 , t_1 , t_2 , движение системы не будет даже периодическим.

Упражнение: рассмотрите простой случай, когда $A_1 = A_2 = 1$, $t_1 = t_2 = 0$, и покажите, что из-за несоизмеримости частот ω_1 и ω_2 не существует такого значения T , при котором $y_1(T) = y_1(0)$, $y_2(T) = y_2(0)$. Это и означает, что такое движение не может быть периодическим.

Ясно, что формулы (5.6) дают самое общее движение. Начальное состояние определяется координатами и скоростями частиц, т. е. значениями $y_1(0)$, $y_2(0)$, $\dot{y}_1(0)$, $\dot{y}_2(0)$. Формулы (5.6) и их производные по времени позволяют найти неизвестные константы A_1 , A_2 , t_1 , t_2 через начальные координаты и скорости.

Замечательно, что нам удалось не только найти самое общее движение, но и разложить его на сумму самых простых из известных нам движений.

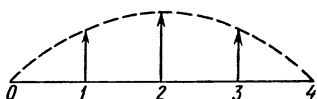
Конечно, в такой простой задаче то же самое можно было бы сделать и более простым способом. Например, если сложить и вычесть уравнения (5.1), то легко получить два независимых уравнения для $(y_1 + y_2)$ и $(y_1 - y_2)$, которые сразу решаются и приводят к формулам (5.6). Однако наш чуть более длинный способ решения имеет преимущество — он легко обобщается на случай цепочки с любым числом частиц.

В качестве упражнения найдите частоты трех мод колебаний цепочки, состоящей из трех частиц. Для частот должен получиться результат: $\omega_1^2 = \omega_0^2 (2 - \sqrt{2})$, $\omega_2^2 = 2\omega_0^2$, $\omega_3^2 = \omega_0^2 (2 + \sqrt{2})$. Сами моды выглядят, как показано на рис. 5.5. Точный смысл этого рисунка (как и рис. 5.4) состоит в том, что моду с номером M можно

представить в виде

$$y_n^{(M)} = A_M \sin\left(\frac{\pi}{4} Mn\right) \cos[\omega_M(t - t_M)].$$

При заданном $M = 1, 2, 3$ индекс n пробегает три значения: $n = 1, 2, 3$, т. е. $y_n^{(M)}$ задает отклонение n -го грузика в M -й моде. В случае двух частиц отклонения для двух мод можно написать в аналогичном виде



$$y_n^{(M)} = A_M \sin\left(\frac{\pi}{3} Mn\right) \cos[\omega_M(t - t_M)],$$

где $M = 1, 2$ и $n = 1, 2$.

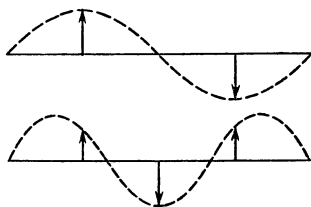


Рис. 5.5

Общую закономерность теперь нетрудно уловить и она наглядно ясна — нарисованные штрихами синусоиды соответствуют стоячим волнам. Легко также догадаться, что в цепочке из N частиц моду с номером M надо искать в виде

$$y_n^{(M)} = A_M \sin\left(\frac{\pi Mn}{N+1}\right) \cos[\omega_M(t - t_M)],$$

$$n = 1, \dots, N; M = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

Уравнение движения для n -го атома составляется точно так же, как уравнения (5.1), т. е.

$$m\ddot{y}_n = k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}), \quad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2. \quad (5.8)$$

Это уравнение годится и для крайних атомов — первого и N -го. Нужно только вспомнить, что крайние пружинки закреплены, т. е. $y_0 = y_{N+1} = 0$. Эти условия для предполагаемых решений (5.7) уже выполнены.

Теперь должно быть ясно, как довести решение до конца. Надо подставить выражение (5.7) в уравнение (5.8), предварительно заменив $\ddot{y}_n^{(M)}$ на $-\omega_M^2 y_n^{(M)}$. После несложных преобразований тригонометрических функций получится соотношение для ω_M^2 , при выполнении которого все уравнения (5.8) удовлетворяются; это выражение мы приведем без вывода

$$\omega_M = 2\omega_0 \sin \frac{\pi M}{2(N+1)}, \quad M = 1, \dots, N. \quad (5.9)$$

Читателю стоит потратить некоторое время, чтобы самостоятельно разобраться в этих результатах. Затраченные усилия

полностью окупятся. После уравнений Галилея — Ньютона и принципа сохранения энергии разложение произвольного движения на моды, или нормальные колебания, представляет собой, возможно, самый фундаментальный результат физики. Его обобщения и приложения, от простых механических задач до современных проблем физики элементарных частиц, просто невозможно перечислить.

З а м е ч а н и е. Если прямое решение для любого N покажется трудным, то лучше сначала решить этим новым способом уже знакомые задачи с двумя и тремя атомами. Переход к произвольному N после этого не представит труда. Позже мы решим очень похожую задачу о распространении бегущих волн в бесконечной цепочке, и можно отложить более близкое знакомство со стоячими волнами до этого момента.

Отступление в историю. Семья Бернулли и волны

Эти простые наблюдения отвлекли нас от первоначальной задачи Ньютона — вычисления скорости распространения волны. Скоро мы к ней вернемся, а сейчас сделаем небольшое отступление в историю. Хотя Ньютон привел лишь решение задачи о вычислении скорости бегущей волны, он, конечно, размышлял и о стоячих волнах. В самом конце того раздела «Начал», в котором определяется скорость распространения звука, он очень коротко говорит об основной частоте тона органной трубы и высказывает догадку, что длина стоячей звуковой волны в трубе, открытой на одном конце, равна учетверенной длине трубы. Представления о других возможных модах, равно как и ясного понятия о стоячих волнах вообще, у Ньютона нет.

Полная теория колебания в одномерной цепочке была построена Иоганном Бернулли (1667—1748) и его сыном Даниилом Бернулли (1700—1782). Вместе с братом Иоганна Якобом Бернулли (1654—1705) они — наиболее выдающиеся представители знаменитой династии швейцарских ученых. Семья Бернулли эмигрировала из Антверпена в XVI в., спасаясь от жестокостей испанских завоевателей, и в конце концов осела в Базеле. Якоб и Иоганн Бернулли были учениками Лейбница и стали крупнейшими математиками своего времени. Под руководством Иоганна Бернулли изучали математику его сын Даниил и Леонард Эйлер. Семья Бернулли была тесно связана с Россией. В 1725 г. Даниил уехал в Петербург, где оставался до 1733 г. В следующем году за ним последовал и Эйлер, который провел в России почти полжиз-

ни. Бернулли и Эйлер опубликовали многие свои сочинения в трудах Петербургской Академии наук и были ее членами.

Существование нормальных мод было установлено отцом и сыном Бернулли, а возможность разложения произвольного движения цепочки по нормальным модам (*принцип суперпозиции*, или *принцип сложения колебаний*) была открыта Даниилом Бернулли. Он был самым выдающимся физиком в семье Бернулли; наиболее знамениты его достижения в гидродинамике, кинетической теории газов и в теории колебаний.

Надо отметить, что принцип суперпозиции, с помощью которого мы так просто изучили общее движение цепочки по легко определяемым нормальным модам, был признан и вошел в науку не сразу. В числе его противников были даже Эйлер и Лагранж. В своих исследованиях они очень близко подошли к открытию этого принципа, но имели достаточно серьезные основания сомневаться в его справедливости, о которых будет сказано чуть позже.

Впоследствии одномерную цепочку в связи с распространением звуковых волн в газах, жидкостях и твердых телах изучали Лагранж и Коши. Особенно полную теорию цепочек, состоящих из атомов разных сортов, разработал в конце прошлого века Кельвин. Он применил свою теорию к распространению световых волн в твердых телах и нашел простое объяснение явления дисперсии света*), открытого в середине XVII в. чешским ученым Яном Маркусом Марци и вновь открытого Ньютоном, не знавшим о работах Марци (вспомним о знаменитом опыте Ньютона по разложению солнечного света в спектр с помощью призмы). Замечательная и глубокая работа Кельвина не была полностью понята и оценена современниками, а его модель была возрождена уже в двадцатом веке, когда начали изучать кристаллические решетки, состоящие из реальных атомов.

*) Слово «дисперсия» означает в переводе с латинского рассеяние, разброс. В оптике дисперсией обычно называют явление зависимости показателя преломления от частоты или длины волны. В общей теории волн дисперсию связывают с зависимостью скорости волны от ее длины, а соотношение между частотой и длиной волны называют дисперсионной формулой. Дисперсия очень важна в теории солитонов, и мы изучим ее подробно.

Волны Д'Аламбера и споры вокруг них

Воображение принимает в творчестве геометра не менее участия, чем в минуты вдохновения у поэта.

Д'Аламбер

После исследований Бернулли по одномерным цепочкам Эйлер начал изучать колебания струны, не пытаясь представить ее с помощью простой модели, а считая ее сплошной средой. При этом движение струны определено, если известно ее отклонение от положения равновесия $y(t, x)$ как функция координаты x и времени. В уравнение, описывающее движение струны, входят, как мы увидим, не только производные по времени \ddot{y} , но и производные по координате y'' . Такие уравнения называются *уравнениями с частными производными*. Их систематическое изучение, которое продолжается и в наши дни, было начато Эйлером.

Движения струны описываются очень простым уравнением, с которым мы познакомимся чуть позже. Опираясь на исследования Эйлера, знаменитый французский математик и энциклопедист*) Жан ле Рон Д'Аламбер (1717–1783) нашел в 1748 г. его решение

$$y(t, x) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (5.10)$$

в котором f и g могут быть произвольными функциями.

Это замечательное решение, которое называется решением Д'Аламбера (или волной Д'Аламбера), описывает все возможные движения струны при соответствующем выборе функций f и g **). Например, если $g = 0$, то решение Д'Аламбера дает волну, бегущую по оси x направо со скоростью v . Скорость v не произвольна, а определенным образом зависит от упругости и силы натяжения струны (характер этой зависимости сейчас нам не важен).

Если положить $f(x) = \sin(2\pi x/\lambda)$, то получим синусоидальную бегущую волну

$$y(t, x) = \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right].$$

*) Вместе с Дени Дидро он возглавлял работу над монументальной «Энциклопедией наук, искусств и ремесел», 33 тома которой вышли в свет с 1751 по 1777 гг. Это была первая в мире энциклопедия в современном смысле слова.

**) Так как решение Д'Аламбера описывает *любые* волны, которые могут распространяться по струне, то, зная это решение, можно вообще забыть об уравнении. Точно так же для описания всех возможных движений точечной частицы, на которую не действуют внешние силы, достаточно знать галилеев закон движения $x = x_0 + vt$, забыв об уравнении Ньютона.

Записывая эту волну в более привычном виде

$$y(t, x) = \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt \right) \right],$$

находим обычное соотношение между частотой и длиной волны: $v = v/\lambda$. Общее решение (5.10) описывает и движение волнового импульса, изображенного на рис. 5.3. Описывает оно и стоячие волны. Например, если взять

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2} \sin(2\pi x/\lambda),$$

то легко найти, что

$$y(t, x) = \sin(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi vt).$$

В общем случае, если заданы начальные значения отклонений и скоростей всех точек струны, т. е. значения y и \dot{y} при $t=0$ и всех значениях x , то можно найти вид функций f и g при всех значениях аргументов и тем самым определить все дальнейшее движение струны. Точно так же по начальным отклонениям и скоростям двух грузиков определялись неизвестные параметры A_1, A_2, t_1, t_2 в формуле (5.6); только теперь вместо неизвестных параметров определяются неизвестные функции f и g .

Мы еще не раз встретимся с конкретными применениями решения Д'Аламбера, а сейчас лишь отметим, что именно оно и вынудило Эйлера и Лагранжа отказаться от принципа суперпозиции Даниила Бернулли. Действительно, согласно этому принципу общее движение струны можно было бы представить как сумму (суперпозицию) гармонических синусоидальных движений, а это означало бы, что произвольную функцию можно представить в виде суммы тригонометрических функций. Такая возможность казалась Эйлеру и Лагранжу совершенно невероятной. Поэтому они придерживались мнения, что принцип суперпозиции хорош для систем из конечного числа материальных точек, но неприменим к таким «сплошным» объектам, как струна.

Разрешить многолетние споры вокруг этой проблемы сумел лишь Фурье в 1807 г., который показал, что произвольную функцию, определенную на конечном отрезке, действительно можно представить в виде бесконечной суммы тригонометрических функций. Это обобщение разложения на моды носит название *ряда Фурье*. Любопытно, что при доказательстве своей фундаментальной теоремы Фурье в наибольшей степени опирался на исследования Эйлера и Лагранжа. Отрицание Лагранжем принципа суперпозиции кажется тем более удивительным, что именно он первым ясно установил

связь между колебаниями цепочки частиц и движениями струны.

Пора, видимо, написать это уравнение*). До сих пор оно было чем-то вроде таинственного персонажа в пьесе, которого все боятся, но никто не видел, и можно подумать, что это уравнение окажется очень сложным. На самом деле несложно догадаться, что уравнение должно быть очень простым, если у него так просто выглядит общее решение. В чем же состоит необычайная простота решения Д'Аламбера? Она заключается в том, что решение выражено через произвольные функции f и g , но каждая из них реально зависит не от координаты и времени, а от простейшей их линейной комбинации. Мы можем просто нарисовать графики функций $f(x)$ и $g(x)$ и двигать их равномерно в противоположных направлениях оси x . Сумма таких функций и будет в каждый момент времени изображать решение Д'Аламбера.

Это легко описать математически. Рассмотрим график функции $f(x)$, равномерно движущийся со скоростью v . За малое время Δt он сдвинется на расстояние $(AB) = v \Delta t$ (рис. 5.6). При этом в той же самой точке x значение функции будет представлено точкой C , так что $(CA) = -\Delta f$ и

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Delta f}{v \Delta t} = -\frac{1}{v} \dot{f}.$$

График функции f вблизи точки A можно приблизительно заменить прямой линией, наклон которой определяется производной по координате f' . Обозначив длину отрезка $(AB) = v \Delta t$ через Δx , получим по определению производной, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'$$

(так как график сдвигается вдоль оси x , то $AD \parallel CB$, $\angle CBA = \angle DAB$ и $(CA) = (DB) = \Delta f$).

Сравнивая оба выражения для $\operatorname{tg} \alpha$, получаем, что $\dot{f}(x - vt) = -vf'(x - vt)$. Такими же рассуждениями или просто переменной знака скорости легко показать, что $\dot{g}(x + vt) = vg'(x + vt)$. Применяя эти рассуждения к функциям $f'(x - vt)$ и $g'(x + vt)$, находим, что \dot{f} и \dot{g} удовлетворяют одному и тому же соотношению: $\dot{f} = v^2 f''$, $\dot{g} = v^2 g''$. Так как операции дифференцирования линейны, то выражение $y = f + g$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y} = v^2 y''. \quad (5.11)$$

*) Для понимания дальнейшего знать это уравнение полезно, но не обязательно. Вполне достаточно освоиться с бегущими волнами Д'Аламбера (5.10).

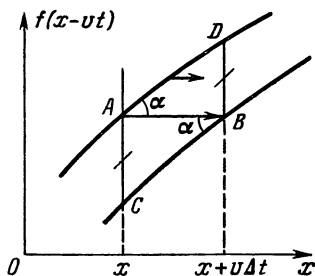


Рис. 5.6

Это и есть знаменитое *волновое уравнение*. Мы получили его не из физической модели, а просто показали, что сумма любых двух функций $f(x - vt)$ и $g(x + vt)$ удовлетворяет этому уравнению. Ссылаясь на авторитет Д'Аламбера, мы утверждаем и обратное: всякую функцию $y(t, x)$, производные которой по времени и координате удовлетворяют соотношению (5.11), можно представить как сумму двух таких функций.

Это простое уравнение и его обобщения на случай функций, зависящих от нескольких координат, играют такую же роль в физике непрерывных систем, как уравнение движения простого линейного маятника в механике материальной точки (в новых обозначениях оно записывается в виде $\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi$). Удивительно, что переход от одной точки к такому бесконечно более сложному объекту, как струна, «состоящая» из бесконечного числа точек, привел к столь простой теории. Удивительно также необычайное число приложений волнового уравнения, от волн в «океанах воды, воздуха и эфира», как сказал бы Рассел, до волн, описывающих элементарные частицы.

В наше время волновое уравнение стало настолько привычным, что его эффективности никто уже не удивляется. Однако если попытаться мысленно охватить все, что было сделано с помощью этого уравнения, вообразить, какое богатство явлений природы скрывается за столь простой формулой, то эпитеты «удивительное» или «необычайное» не покажутся неуместными. Один выдающийся современный физик как-то написал популярную статью «О непостижимой эффективности математики в естественных науках». В эффективности волнового уравнения, конечно, есть что-то непостижимое, что бы ни говорили люди, которые умеют объяснить все.

О дискретном и непрерывном

..Между отдельными существующими вещами всегда находятся другие, а между ними опять другие И, таким образом, сущее беспредельно

Зенон из Элеи, V в. до н э

Вернемся, однако, к «суровой прозе», воплощенной в уравнении (5.8). Оно связано не с близкой музам струной, а с прозаическими «грузиками на пружинках», да и выглядит куда менее элегантно, чем волновое уравнение. Тем не менее эти уравнения тесно связаны друг с другом. Это не удивительно, если наша (т. е. ньютонова) «грузо-пружинная» модель может дать разумное приближенное описание волн в сплошных средах. Первым это установил

в 1754 г. все тот же неутомимый Лагранж, но окончательной ясности добился лишь Коши (1830 г.).

Он показал, каким образом можно найти движение струны по начальным значениям отклонений и скоростей точек струны (в математике эта задача и называется *задачей Коши*). Он также связал решения волнового уравнения, полученные методами Д'Аламбера и Фурье, доказав полную справедливость принципа суперпозиции, и даже попытался объяснить дисперсию света в веществе, считая, что свет возбуждает упругие волны с очень высокой частотой. Коши очень ясно показал, что при длинах волн, много больших расстояний между частицами в цепочке, скорость распространения волн в цепочке не зависит от длины волны, т. е. нет дисперсии. Для коротких же волн скорость зависит от длины волны и может заметно изменяться. Это полностью справедливо для упругих волн, но дисперсию световых волн объясняет лишь качественно. Более точную модель дисперсии света нашел, как уже упоминалось, Кельвин.

Понимание связи между ньютоновской дискретной средой (от лат. *discretus* — прерывистый, разделенный) и эйлеровой непрерывной средой очень важно, так как в разных случаях удобно переходить от дискретного языка к непрерывному, и обратно.

Например, если изучаются упругие волны в кристаллах, то обычно можно забыть об их атомной структуре и считать кристалл просто непрерывной упругой средой. Атомная структура скажется на том, что упругие свойства кристалла будут разными в разных направлениях. Мы, однако, пойдем намеченным путем, так как у нас есть надежные уравнения (5.8), описывающие движения каждой точки дискретной системы.

Предположим для определенности, что грузопружинная модель, изображенная на рис. 5.1, должна приближенно воспроизводить продольные колебания и волны в упругом стержне. Точно так же можно рассмотреть звуковые волны в трубе, поперечные колебания струны и т. п. Идея перехода к непрерывной среде ясна: нужно уменьшать массы грузиков и длины пружинок так, чтобы средняя линейная плотность (т. е. масса на единицу длины $\rho_1 = m/a$) и упругость пружины оставались постоянными.

Сначала надо немного точнее определить, что такое упругость пружины. В правой части уравнения (5.8) написана сила, действующая на n -й грузик при растяжении n -й пружины с длиной a на величину Δl : $F = k(y_{n+1} - y_n) = k \Delta l$. Значение коэффициента k должно подбираться так, чтобы стержень и

пружинная система одинаковой длины растягивались на одну и ту же величину под действием одной и той же силы.

Удлинения стержня и пружины пропорциональны их длине. Например, если пружинка удлиняется на Δl , то обе ее половинки удлиняются на $\Delta l/2$. Это значит, что коэффициент k для пружинки длиной $a/2$ равен просто $2k$. Поэтому, записав силу $F = k \Delta l$ в виде $F = ka(\Delta l/a)$, мы получим характеристику упругости пружины, не зависящую от ее длины: для пружины любой длины a величина $ka = K$ одна и та же. Для стержня любой длины l также будет верно соотношение $F = K(\Delta l/l)$. Значение K определяется только упругостью стержня и не зависит от его длины.

Исходя из этих соображений, перепишем уравнение (5.8) в виде

$$\frac{m}{a} \ddot{y}_n = (ka) [(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})]/a^2. \quad (5.12)$$

Если a уменьшается, а отклонения $y_n(t)$ меняются от точки к точке медленно, то они описываются в каждый момент t некоторой плавной кривой $y(t, x)$, подобной изображенной на рис. 5.1 и такой, что $y_n(t) = y(t, na)$. Тогда, по определению производной по координате, $(y_{n+1} - y_n)/a \approx y'_n$, $(y_n - y_{n-1})/a \approx y'_{n-1}$, где y'_n — значение производной в точке $x = na$, а y'_{n-1} — в точке $x = (n-1)a$. Точно так же заключаем, что $(y'_n - y'_{n-1})/a \approx y''_n$.

Заменяя теперь в уравнении (5.12) $y_n(t)$ на $y(t, na)$ и продолжая получившееся соотношение со значений $x = na$ на все значения x , получаем уравнение

$$\rho_1 \ddot{y} = K y''. \quad (5.13)$$

Сравнивая это уравнение с волновым уравнением (5.11), находим, что скорость распространения упругой волны равна $v = \sqrt{K/\rho_1}$. Наш вывод уравнений (5.13) Коши не признал бы строгим, но по существу он правилен, и при желании его вполне можно довести до

уровня достаточно строгого доказательства. Физик удовлетворится и этим нестрогим рассуждением.

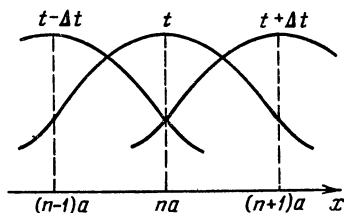


Рис. 5.7

Скорость распространения волн по цепочке можно найти, и не прибегая к уравнению Д'Аламбера. Если по цепочке бежит волна неизменной формы со скоростью v , то она перемещается на расстояние a за время $\Delta t = a/v$. Отсюда следует,

что $y_{n-1}(t) = y_n(t + \Delta t)$ и $y_{n+1}(t) = y_n(t - \Delta t)$ (см. рис. 5.7). Если рассматривать $y_n(t)$ как график движения некоторой точки, то $\dot{y}_n(t)$ будет скоростью, а $\ddot{y}_n(t)$ — ускорением точки. Приближен-

но считая движение от момента $t - \Delta t$ до момента $t + \Delta t$ равномерно ускоренным, можно написать

$$y_n(t \pm \Delta t) \approx y_n(t) \pm \dot{y}_n(t) \cdot \Delta t + \ddot{y}_n(t) \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Подставляя полученные таким способом выражения для $y_{n-1}(t)$ и $y_{n+1}(t)$ в уравнение (5.8), находим, что $[m - k(\Delta t)^2] \ddot{y}_n(t) = 0$. Отсюда следует, что $(\Delta t)^2 = m/k$ (предполагается, конечно, что в какой-нибудь момент времени $\ddot{y}_n(t) \neq 0$). Для скорости волны $v = a/\Delta t$ находим поэтому выражение

$$v = a/\sqrt{k/m} = \sqrt{(ka)/(m/a)} = \sqrt{K/\rho_1}. \quad (5.14)$$

Чтобы найти скорость распространения упругих волн (т. е. скорость звука) в реальных твердых телах, надо еще немного преобразовать формулу $v = \sqrt{K/\rho_1}$. В таком виде она, на первый взгляд, зависит не только от вещества, из которого изготовлен стержень, но и от его поперечного сечения S . Действительно, линейная плотность равна произведению обычной объемной плотности ρ на поперечное сечение: $\rho_1 = \rho \cdot S$. Однако упругая постоянная K численно равна силе, необходимой для увеличения длины стержня в два раза ($F = K(\Delta l/l) = K$, если $\Delta l = l$; при реальном измерении K , естественно, рассматривается лишь малое относительное удлинение $\Delta l/l$ и K определяется как отношение силы F к вызванному ею относительному удлинению). Ясно, что эта сила пропорциональна площади S , и поэтому $K = E \cdot S$, где величина E уже не зависит от S , а определяется лишь материалом, из которого сделан стержень.

Эту постоянную E называют модулем Юнга. Значения модуля Юнга и объемной плотности для различных материалов измерены на опыте, и их можно найти в справочниках. Например, для стали $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, $E \approx 2,1 \cdot 10^{12} \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2)$. Выражая ρ_1 и K через ρ и E , находим скорость звука в стали $v = \sqrt{E/\rho} \approx 5 \text{ км/с}$. Это неплохо согласуется с прямыми измерениями.

Подумайте, как их можно было бы осуществить. Ясно, что легче измерять не скорость, а длину волны $\lambda = v/\nu$. При $\nu = 10 \text{ кГц}$ получим $\lambda \approx 50 \text{ см}$.

Как измерили скорость звука

До конца XVIII в. думали, что звук в твердых телах передается мгновенно. Первое измерение скорости звука в твердых телах по отношению к скорости в воздухе

выполнил в 1797 г. немецкий ученый Эрнст Хладни (1756–1827). Он же провел первые точные и тщательные измерения скорости звука в различных газах, пользуясь для этой цели органами трубами. Хладни получил юридическое образование, а естественные науки изучал самостоятельно. Под влиянием чтения сочинений Бернулли и Эйлера он заинтересовался акустикой и начал изучать звучащие пластинки, в результате чего открыл прославившие его «звуковые фигуры».*) Фигуры Хладни образуются на посыпанных песком колеблющихся пластинках (песок собирается в узлах стоячих волн).

Хладни также открыл продольные и вращательные колебания в стержнях, открыл и изучил многие акустические колебательные явления, изобрел несколько музыкальных инструментов, на которых сам играл. Его опыты, всегда отличавшиеся изобретательностью и остроумием, заложили основы экспериментальной акустики, и ему принадлежит первое систематическое изложение акустики, выпущенное в свет в 1802 г. Под впечатлением обаяния личности Хладни, его лекций и опытов, Наполеон выделил 6000 франков для перевода его «Акустики» на французский язык.

Скорость распространения звуковых волн можно оценить и просто из соображений размерности. Так как механизм распространения волн нам уже достаточно понятен, нетрудно сообразить, что скорость звука в стержне зависит лишь от модуля Юнга E , плотности ρ и, может быть, от длины волны λ : $v = d \cdot E^a \rho^b \lambda^c$. Так как $[E] = ML^{-1}T^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[\lambda] = L$ и $[v] = LT^{-1}$, то $a = -b = 1/2$, $c = 0$, т. е. $v = d\sqrt{E/\rho}$, где d — неизвестное число (как показано выше, из формулы (5.14) следует, что $d = 1$).

Любопытно, что простые соображения размерности показали, что скорость звука не может быть пропорциональна какой-нибудь степени λ . Это значит, что дисперсию (т. е. зависимость скорости от длины волны) из простых соображений размерности получить нельзя. Заметим также, что мы не учли зависимость v от амплитуды колебаний. Это представляется разумным для малых амплитуд, когда эффектами нелинейности можно пренебречь (ср. с формулой (4.1)).

*) Первым сумел сделать звуковые колебания «видимыми» Галилей. Он поместил бокал в воду так, чтобы края его немного выступали над поверхностью. При возбуждении в бокале звуковых колебаний около него на поверхности образуется радиальная рябь поверхностных волн.

При отсутствии дисперсии из соображений размерности следует независимость скорости звука от амплитуды. Проверьте это, предположив, что в формуле размерности для v показатель $s = 0$, но введя зависимость от амплитуды.

Точно так же можно оценить скорость звука в жидкостях, например, в воде. Только в этом случае вместо модуля Юнга надо взять модуль объемной упругости жидкости K . Он определяется соотношением $\Delta p = -K(\Delta V/V)$, где Δp — приращение давления, необходимое для того, чтобы уменьшить объем V на величину ΔV . Эта формула совершенно аналогична соотношению $F/S = E(\Delta l/l)$ для стержня, и мы сразу можем найти скорость звука в жидкостях: $v = \sqrt{K/\rho}$. Для воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $K \approx 2,13 \cdot 10^{10} \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2)$, так что $v \approx 1460 \text{ м/с}$. Заметьте, что скорость звука зависит от плотности, а значит, несколько меняется с температурой.

Между прочим, до начала XIX в. распространение звука в жидкостях считалось невозможным. Хладни придерживался противоположного мнения, но попыток измерить скорость звука в жидкостях не делал. Первое измерение было выполнено в год смерти Хладни швейцарскими учеными Жаном Колладоном и Жаном Штурмом, получившими значение $v = 1435 \text{ м/с}$ при температуре 8°C .

Читатель легко найдет и скорость распространения поперечных волн в натянутой струне. В этом случае возвращающая сила пропорциональна силе натяжения струны F , и при малом изгибе и растяжении струны не зависит от ее упругости. Предполагая, что $v = dF^a \rho_1^b$, где ρ_1 — линейная плотность струны, покажите, что $v = d\sqrt{F/\rho_1}$; из опыта и из более полной теории следует, что $d = 1$. Это соотношение в равной степени применимо к металлической струне, нитке и рыболовной леске.

Опыты удобнее всего делать с леской. Изменяя ее натяжение, можно менять частоту основного тона, который можно отождествить с одной из нот, извлекаемых на фортепиано. Нота «ля» первой октавы обычно настраивается с помощью камертона на частоту $\nu_0 = 440 \text{ Гц}$. Частоты ν_n , соответствующие другим нотам, определяются соотношением $\log(\nu_n/\nu_0) = (n/12) \log 2$. Для «ля» во второй октаве $n = 12$, и частота равна $2\nu_0$. При ходе от ν_0 на октаву ниже $n = -12$, и частота равна $\nu_0/2$.

Определяя частоты с помощью фортепиано или другого музыкального инструмента, можно найти скорость распространения волны по формуле $v = \lambda\nu$, так как длина волны основной моды для струны с закрепленными концами равна удвоенной длине струны. Пользуясь этой простой идеей, Хладни и определил на опыте скорости звука в газах и

твердых телах, только частоты он определял не на фортепиано, а на монохорде. Хорда в переводе с древнегреческого — струна, и монохорд можно назвать «однострунником». Это просто струна на резонаторе, длину звучащей части которой можно менять. Монохорд, вероятно, изобрел Пифагор. Он же первым открыл простые соотношения между музыкальными интервалами.

Легко найти и скорость звука в газах. Аналог модуля упругости в этом случае — давление. Действительно, из закона Бойля — Мариотта $pV = \text{const}$ следует, что $V \cdot \Delta p + p \cdot \Delta V = 0$, т. е. $\Delta p = -p(\Delta V/V)$. Подставляя в формулу для скорости звука в жидкости вместо модуля объемной упругости давление, находим $v = \sqrt{p/\rho}$. Эту формулу получил Ньютон, который пользовался описанной в начале главы дискретной моделью. Рассуждения Ньютона были весьма сложны и стали понятны лишь после работ Бернулли, Эйлера и Лагранжа. Лагранж писал: «эта теория одними почиталась за непонятную, другие находят ее противоречивой, в сущности же, если она и обладает каким недостатком, то тем, что она слишком частная, но вместе с тем она содержит зачаток истинной теории, открытой лишь в последнее время при помощи анализа».

Кроме того, величина v , полученная Ньютоном, сильно расходилась с наблюдаемым значением*). Это было известно Ньютону, но его объяснение этого расхождения нельзя признать ни понятным, ни убедительным. Эта трудность только усилилась после опытов Хладни, который выяснил, что формула Ньютона сильно расходится с опытом и для других газов. Вычислим по формуле Ньютона скорость v для воздуха. Так как $p/\rho = RT$, где R — газовая постоянная, а T — температура, то для воздуха при $T = 273 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$ получаем $v \approx 280 \text{ м/с}$ вместо 332 м/с .

Правильное объяснение этому расхождению нашел Лаплас, заметивший, что при прохождении звуковой волны температура воздуха в местах сгущения и разрежения различна, и законом Бойля — Мариотта пользоваться нельзя. Вместо этого Лаплас предположил, что изменения состояния газа в звуковой волне происходят столь быстро, что тепло не успевает передаваться от нагретых сжатых участков к охлажденным разрежен-

*) Первое точное измерение скорости звука в воздухе было сделано в коллективной работе членов Парижской Академии наук в 1738 г. Измерялось время, за которое звук пушечного выстрела проходит 30 км. Чтобы исключить влияние ветра, выстрелы производились одновременно из двух пушек, удаленных друг от друга на 30 км.

ным, т. е. процесс происходит *адиабатически* *). Правильность его объяснения оспаривалась еще лет тридцать. Тем не менее общая теория волновых процессов уже в начале века твердо стояла на ногах и быстро завоевывала новые области для своих приложений.

Особенно важно это было для волновой теории света. В работах Френеля волновая теория была настолько основательно разработана, что успешно объясняла не только явления, известные до ее победы, но и подсказывала новые. Единственная неудача постигла волновую теорию в объяснении явлений *дисперсии света*. Как и в теории звука, в оптике Френеля скорость волны могла изменяться в разных средах, но зависимости скорости от длины волны в одной среде не получалось. Пуассон даже после описанных в ч. I опытов сомневался в правильности теории Френеля. Его главное возражение как раз было связано с проблемой дисперсии. В ответе Пуассону Френель указал на молекулярную структуру вещества как на возможный источник дисперсии. К сожалению, ранняя смерть не позволила Френелю развить эту идею, но ее подхватил Коши.

Дисперсия волн в цепочке атомов

Найдем вслед за Коши дисперсионную формулу для волн в цепочке «атомов», соединенных пружинками. Вспомнив то, что мы знаем о связи дискретной цепочки со сплошным стержнем, попробуем сразу написать решение всех уравнений (5.8) в виде бегущей волны ($v = v\lambda$):

$$y_n = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} na \right) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (vt - na) \right].$$

Если, как это делалось раньше, заменить na на x и $y_n(t)$ на $y(t, x)$, то получится знакомая синусоидальная бегущая волна. Ее скорость v определяется из условия постоянства фазы $(\omega t - 2\pi x/\lambda)$. Поэтому скорость v называют *фазовой скоростью*. Если двигаться со скоростью v , то волна будет казаться неподвижной.

Так как $\ddot{y}_n = -\omega^2 y_n$, то из (5.8) следует простое уравнение

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} y_n = (y_{n+1} + y_{n-1}) - 2y_n. \quad (5.15)$$

С помощью известной формулы для преобразования суммы

*) См. книгу: Смородинский Я. А. Температура. — М.: Наука, 1981. — Библиотечка «Квант», вып. 12.

синусов двух углов в произведение легко найти, что для синусоидальной волны $y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\right)$.

Подставляя это в уравнение (5.15), легко увидеть, что оно выполнено сразу для всех n , если

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\right) \right] = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right). \quad (5.16)$$

Это и есть *дисперсионная формула Коши*.

Если длина волны много больше расстояния между атомами, т. е. $(\pi a/\lambda) \ll 1$, то $\sin(\pi a/\lambda) \approx \pi a/\lambda$ и $\omega \approx 2\pi\omega_0(a/\lambda)$. При этом дисперсия исчезает, так как скорость не зависит от λ : $v(\lambda) = \omega\lambda/2\pi \approx a\omega_0 = a\sqrt{k/m} = v$. Этот результат мы уже получили раньше при переходе к «непрерывному» пределу (см. формулу (5.13)). Если длина волны сравнима с расстоянием между атомами, то скорость зависит от λ :

$$v(\lambda) = (\omega_0 a) \frac{\lambda}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{\lambda} = v \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) / \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right). \quad (5.17)$$

С уменьшением λ она уменьшается. Заметим, что нет смысла рассматривать длины волн, меньшие $2a$. Понять это легко, если вспомнить, что наблюдать мы можем лишь движения частиц, а не мысленно проведенные через их отклонения синусоиды (см. рис. 5.5). С учетом этого ограничения скорость убывает при уменьшении длины волны от значения v до значения $(2v/\pi)$.

Дисперсионную формулу (5.16) можно получить и из найденного нами раньше выражения для частот стоячих волн в цепочке конечной длины l (см. (5.9)). Для этого заметим, что длина волны в моде с номером M равна $\lambda_M = 2(N+1)a/M = 2l/M$, где $M = 1, \dots, N$. Подставляя λ_M в формулу (5.9), видим, что она приводит к тому же соотношению между ω_M и λ_M , что и формула Коши.

Плавные синусоидальные кривые, огибающие решения (5.7), можно получить, заменив в формуле (5.7) πa на x :

$$y_M(t, x) = A_M \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_M}\right) \cos[\omega_M(t - t_M)]. \quad (5.18)$$

Это выражение описывает и стоячие волны в струне. При этом λ_M принимает значения $\lambda_M = 2l/M$, где M может неограниченно возрастать ($M = 1, 2, 3, \dots$). Значения частот $\nu_M = \omega_M/2\pi$ получаются из дисперсионной формулы (5.16), если заменить в ней $\sin(\pi a/\lambda)$ на $\pi a/\lambda$ (вспомните, что в пределе непрерыв-

ности $a \rightarrow 0$):

$$\lambda_M = \frac{\omega_0 a}{v_M} = \frac{1}{\lambda_M} \sqrt{\frac{K}{\rho_1}} = \frac{M}{2l} \sqrt{\frac{K}{\rho_1}}. \quad (5.19)$$

Аналогичные формулы читатель легко напишет для частот собственных колебаний струн, воздуха в органных трубах и т. д.

Как «услышать» разложение Фурье?

Рояль был весь раскрыт и струны в нем дрожали...

А. Фет

Можно проверить, что функции $u_M(t, x)$ в формуле (5.18) удовлетворяют волновому уравнению. Линейные комбинации таких решений также являются решениями. Этот способ решения волнового уравнения открыл еще Даниил Бернулли (метод Бернулли), но лишь Фурье сумел с полной ясностью доказать, что так можно получить самое общее решение и что в этом смысле метод Бернулли равносильен методу Д'Аламбера. Разложение произвольного колебания струны в сумму мод (5.18) и другие подобные разложения (например, разложение бегущей волны на сумму синусоидальных бегущих волн) называются разложениями Фурье. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ (т. е. $f(x + 2l) = f(x)$ при любом x) представлена в виде суммы

$$f(x) = \sum_M A_M \sin\left(\frac{\pi M}{l} x\right) = \sum_M A_M \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_M}\right), \quad (5.20)$$

то легко проверить, что д'аламберова волна (5.10) при $g(x) = f(x)$ представляется в виде суммы мод (5.18), в которой следует положить $\omega_M = 2\pi v/\lambda_M$.

Обычно амплитуды A_M быстро убывают с ростом номера моды M . Рассмотрим, например, движение струны, оттянутой в средней точке и после этого отпущенной. Так возбуждаются колебания струн щипковых инструментов. При этом «звучат» все моды*), но их амплитуды быстро убывают с ростом частоты. Ухо воспринимает как высоту звука

*) Синусоидальные моды часто называют гармониками, что особенно естественно, если речь идет о музыке. Мы называем гармониками только синусоидальные бегущие волны, так что разложение Фурье для стоячей волны — это разложение на нормальные моды, а для бегущей — разложение на гармоники.

частоту, соответствующую низшей (основной) моде, а примесь высших мод определяет тембр. Звуки, вызванные очень высокими модами, не воспринимаются по двум причинам. Во-первых, их амплитуда мала. Во-вторых, ухо просто «не слышит» частоты больше 20 кГц (это, кстати, объясняет бедность тембра высоких звуков).

Таким образом, о высших модах часто можно просто забыть и с легким сердцем пользоваться разложением Фурье с конечным и даже небольшим числом членов. Разложение бегущей волны на простые гармоники с полным основанием можно рассматривать не просто как математическое изобретение, а как физический процесс, который наблюдается постоянно. Этот процесс называется гармоническим анализом, а приборы, которые его осуществляют, называют гармоническими анализаторами. Они откликаются (резонируют)* на гармоники, частота которых близка к одной из их собственных частот (т. е. к частоте одной из мод). Таким образом можно выявить частотный состав произвольного колебания. Простейшие анализаторы звука — монохорд или же просто струны любого музыкального инструмента. При достаточной силе звука они начинают дрожать и даже звучать, если среди набора частот (или, как говорят, в спектре частот) падающей на них звуковой волны есть достаточно сильная составляющая, частота которой совпадает с их собственной частотой.

Как мы знаем, *в среде без дисперсии волна с небольшой амплитудой распространяется, не изменяя формы*. На языке разложения на гармоники это связано с тем, что все ее простые гармонические составляющие распространяются с одинаковой скоростью. Это можно сказать не только об обычных периодических волнах, но и об импульсах, подобных изображенным на рис. 5.3. Как показал Фурье, такие импульсы тоже можно разложить в ряд по гармоникам. Только при этом в разложении Фурье будут содержаться гармоники с неограниченно возрастающей длиной волны.

В среде с дисперсией импульс тоже можно представить в виде суммы гармоник, но теперь его форма будет изменяться со временем, так как разные гармоники движутся с разными скоростями. Например, горбик, бегущий по дискретной цепочке (рис. 5.3), можно разложить в сумму синусоидальных волн. Однако с течением времени длинноволновые гармоники будут обгонять коротковолновые, и горбик начнет

*) От лат. *sonare* — звучать, *resonare* — звучать в ответ, откликаться. Отсюда же «соната».

расплываться. Его передняя часть (фронт) постепенно будет становиться более полой. Для звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом, это обычно совершенно несущественно. Их длины настолько велики, что дисперсия коротких волн, определяемая формулой (5.17), не успевает проявиться.

Несколько слов о дисперсии света

Для световых волн в веществе наша модель не годится. Если попробовать все же применить ее к объяснению преломления световых волн, как это делал Коши, то расстояние между «атомами» получится несуразно большим, порядка 0,1 мкм.

Уражение: попробуйте получить эту оценку. Напомним, что показатель преломления $n(\lambda) = c/v(\lambda)$ (c — скорость света в вакууме) увеличивается для прозрачного стекла лишь на 1% при переходе от красной части спектра к фиолетовой. В то же время длина волны уменьшается почти в два раза.

Так или иначе, но возможность объяснения явления дисперсии была работами Коши установлена, и его теория качественно объясняла, почему показатель преломления увеличивается при уменьшении длины волны. Коши, а вслед за ним и Буссинеск, уточнивший его теорию дисперсии, представляли зависимость v от λ в виде: $v = v_\infty - b/\lambda^2 + \dots$, где v_∞ и b зависят от свойств среды.

Впоследствии (1862–1872 гг.) было, однако, открыто и исследовано явление «аномальной дисперсии», которое никак нельзя было объяснить теорией Коши*). Оказалось, что вблизи частот, на которых вещество сильно поглощает свет, его показатель преломления зависит от длины волны очень сильно. Может даже наблюдаться уменьшение $n(\lambda)$ с уменьшением λ — отсюда и термин «аномальная», т. е. необычная дисперсия.

Явление аномальной дисперсии было открыто французским физиком Франсуа Ле Ру (1832–1907), наблюдавшим преломление и поглощение света призмой, наполненной парами иода. Сначала он не заметил, что синяя и фиолетовая полосы идут в неправильном порядке, и лишь через два года, в 1862 г., обратил на это внимание. Серьезное исследование аномальной дисперсии началось лишь десять лет спустя.

Замечательно простое объяснение аномальной дисперсии предложил немецкий физик В. Зельмейер (1871 г.). Он предпо-

*) См. книгу: Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Беседы о преломлении света. — М.: Наука, 1982. — Библиотечка «Квант», вып. 18.

ложил, что в молекулах вещества возможны «внутренние» колебания с собственной частотой ω_e — «молекулярный маятник»*) и что поглощение происходит вследствие резонансного возбуждения этих колебаний, т. е. когда частота падающего света ω близка к частоте колебаний молекул. Отсюда Зельмейер нашел аномальную зависимость показателя преломления от частоты при частоте, близкой к ω_e .

Теория Зельмейера, описывающая взаимодействие волн с «резонирующей» средой, была разработана более полно и уточнена в работах Кельвина, Гельмгольца, Лоренца, Друде и других. Кельвин предложил простую модель распространения света в веществе. Он предположил, что к тяжелым грузикам ньютоновой модели (рис. 5.1) прикреплены упругими пружинками очень легкие грузики. Тогда поглощение и дисперсия света определяются взаимодействием световой волны с этими легкими грузиками. Лоренц и Друде поняли, что их надо отождествить со связанными электронами, и разработали довольно убедительную теорию поглощения и дисперсии, объясняющую основные опытные факты.

В заключение этой короткой экскурсии в оптику надо отметить, что точное описание дисперсии в действительности требует применения квантовой теории. Это было сделано в первой половине нашего века, но основная идея объяснения этого любопытного и важного явления родилась, как мы видели, очень давно. Обо всей этой истории можно было бы написать увлекательную повесть, но нас уже давно ждут солитоны.

Дисперсия волн на воде

Вода примером служит нам, примером...

В Мюллер

Дисперсия играет огромную роль в жизни солитонов. Поэтому нам нужно познакомиться и с другими ее видами. Особенно ярко проявляется зависимость скорости распространения волн от их длины для волн на поверхности воды. Это хорошо было известно уже Ньютону. Теорема 37 третьей книги «Начал» гласит: «Скорость волн пропорциональна корню квадратному из длины их». После этого Ньютон в задаче 10 вычисляет скорость волны, сопоставляя вертикальным колебаниям частиц воды качания маятника с дли-

*) Двамя годами ранее подобную модель рассмотрел Максвелл, который не опубликовал свои результаты.

ной $l = \frac{1}{4}\lambda$. За время одного качания T волна сдвигается на расстояние λ , откуда $v = (\lambda/T) = \sqrt{g\lambda}/\pi$. Хотя это лишь приближенное соотношение, приближение получилось довольно неплохое. Правильное выражение с учетом кругового движения частиц воды есть $v = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. Сразу заметим, что с такой скоростью распространяются волны лишь на «глубокой воде», когда глубина h много больше длины волны. В противоположном предельном случае «мелкой воды», когда $h \ll \lambda$, скорость волны зависит лишь от глубины: $v = \sqrt{gh}$.

С точностью до числовых множителей эти формулы можно получить из соображений размерности и простых физических представлений о природе распространения волны. Скорость v может зависеть от g , λ , h , а также от плотности жидкости ρ и от амплитуды волны. Так как размерность массы содержится только в ρ , то сразу ясно, что скорость не зависит от плотности. (Это можно также понять, просто вспомнив, что возвращающая сила, действующая на частичку воды, пропорциональна ее массе. В уравнении движения Ньютона эта масса сокращается, как и в случае маятника.)

Простейшие наблюдения указывают на то, что скорость не зависит от амплитуды. Положив поэтому $v = dg^a \lambda^b h^c$ и сравнивая размерности левой и правой частей, находим

$$v = d\sqrt{g\lambda} (h/\lambda)^c.$$

Здесь показатель c и число d соображениями размерности не определяются. Однако мы знаем, что при распространении колебаний в движение вовлекаются лишь слои воды, расположенные на глубине, меньшей длины волны (амплитуду считаем малой). Это значит, что при достаточно большом расстоянии h от поверхности до дна величина h не играет никакой роли, т. е. надо положить $c = 0$. В противоположном предельном случае, когда $h \leq \lambda$, скорость не должна зависеть от длины волны λ , так как размеры траекторий совершающих колебания частиц воды не могут превышать h (сравните с длинной волной в цепочке атомов). Мы заключаем, что для мелкой воды надо взять $c = 1/2$.

В точной теории можно получить формулу, пригодную при любом соотношении между h и λ . Из нее следует, что при возрастании длины волны скорость сначала растет, но при $\lambda > 2\pi h$ этот рост замедляется и скорость приближается к максимальному, или «критическому», значению $v_k = \sqrt{gh}$. Полезно познакомиться с приближенными выражениями для скорости

в пределе коротких и длинных волн

$$v = \sqrt{g\lambda/2\pi} \text{ при } \lambda \ll h;$$
$$v = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{4\pi^2 h^2}{6\lambda^2} \right) \text{ при } \lambda \gg h. \quad (5.21)$$

Зависимость скорости от длины волны для длинных волн на мелкой воде удивительно напоминает соотношение между v и λ для длинных волн в решетке атомов. Действительно, воспользовавшись тем, что при малых α можно приближенно положить $\sin \alpha \approx \alpha - \alpha^3/6$, легко получить приближение для соотношения (5.17) при $\lambda \gg a$:

$$v(\lambda) \approx v \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{a^2}{\lambda^2} \right).$$

Отсюда ясно, что дисперсия волн на мелкой воде такая же, как для волн в решетке атомов, причем глубина h играет роль расстояния между атомами.

Термин «мелкая вода» весьма условен. Для длинных волн, возникающих при землетрясениях в океане, его средняя глубина (около 5 км) уже оказывается достаточно малой. Такие волны, известные под названием «цунами», можно считать весьма типичными и чрезвычайно опасными солитонами. Мы познакомимся с ними в следующей части, а сейчас только отметим, что диапазон реально наблюдаемых скоростей волн очень велик. В океане при длине волны $\gg 5$ км это $v = \sqrt{gh} \approx 800$ км/ч. В кювете для обработки фотографий при глубине 0,5 см — примерно 20 см/с. Такую скорость легко измерить, достаточно резко толкнуть кювету, чтобы по ней побежало микроцунами. Легко создать и условия, при которых нужно пользоваться «глубоководной» формулой для скорости. Любопытный читатель может проделать множество несложных опытов, запасаясь секундомером и терпением. При проверке «глубоководной» формулы необходимо учесть, что при малых (меньше 5 см) длинах волн начинают сказываться силы поверхностного натяжения, которыми мы до сих пор пренебрегали.

Чтобы понять роль поверхностного натяжения, предположим, что влиянием силы тяжести можно пренебречь. Тогда возвращающая сила определяется только поверхностным натяжением. Какой будет скорость таких волн? Обратимся к испытанному средству — размерностям. Поверхностное натяжение определяют энергией, которую нужно затратить для увеличения площади поверхности на единицу. Эту величину обозна-

чают буквой T (от английского *tension* — натяжение). Для чистой воды $T \approx 0,072$ Дж/м². Кроме величины T длина волны может зависеть от плотности ρ и от длины волны λ . Амплитуду будем считать столь малой, а глубину столь большой, что зависимостью скорости от этих величин можно пренебречь. Действуя по обычной схеме, находим, что $v^2 = 2\pi T/\rho\lambda$. Коэффициент 2π размерностями, конечно, не определяется, мы его взяли из точной теории, разработанной Кельвином (1871 г.). Волны поверхностного натяжения, или *капиллярные волны* (напомним, что натяжение вызывает подъем жидкостей по капиллярам), бегут быстрее при меньшей длине волны. Иными словами, если воспользоваться оптической терминологией, их дисперсия аномальна:

Наличие поверхностного натяжения приводит, как показал Кельвин, к очень интересному следствию — волны на глубокой воде не могут распространяться с очень малой скоростью, иными словами, существует нижняя граница для $v(\lambda)$. Это можно понять с помощью довольно простых рассуждений. Легко подметить, что квадрат скорости волны пропорционален возвращающей силе (коэффициенту упругости k для пружин, натяжению F для струны и т. д.). Если на частичку воды действуют одновременно две возвращающие силы — тяжести и поверхностного натяжения, то надо просто сложить их. При этом скорость волны с учетом обеих сил определяется выражением

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{T}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda}.$$

График зависимости v от λ изображен на рис. 5.8. Скорость $v(\lambda)$ минимальна, когда сила тяжести уравнивается поверхностным натяжением, т. е. когда оба слагаемых в написанном выражении для v^2

равны. Из этого условия находим $\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{T/(\rho g)}$; для чистой воды $\lambda_{\min} < 17$ мм. При $\lambda = \lambda_{\min}$ скорость равна $v_{\min} = \sqrt[4]{4Tg/\rho} \approx 23$ см/с. Формулу для $v^2(\lambda)$ можно переписать в более приятной для глаза и удобной для вычислений форме

$$v^2 = \frac{1}{2} v_{\min}^2 \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda_{\min}} \right). \quad (5.22)$$

Капиллярные волны в виде мелкой ряби на поверхности воды хорошо всем знакомы. Их можно наблюдать

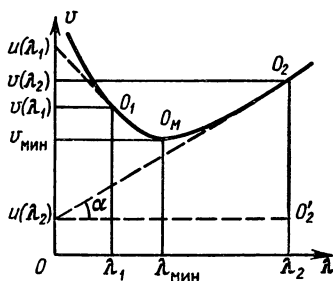


Рис. 5.8

в тазу, наполненном водой, пуская с небольшой высоты капли воды из пипетки. При увеличении высоты длина волны возникающих волн увеличивается. Можно убедиться, что короткие волны чисто капиллярные, а длинные — нет. Для этого добавьте в воду немного мыла. Поверхностное натяжение уменьшится, а с ним уменьшится и скорость коротких волн. Скорость же длинных волн останется прежней.

С какой скоростью бежит стая волн

В опытах наблюдаются, конечно, не бесконечные синусоидальные волны, а группы или, как сказал бы Рассел, стайки волн. Первые систематические наблюдения групп волн и были сделаны Расселом. Он заметил, что скорость перемещения стайки в целом меньше, чем скорость отдельных волн. При наблюдении кажется, что волны продвигаются сквозь группу, как бы исчезая на передней ее границе. Это явление объяснил в 1876 г. Стокс, который и ввел понятие *групповой скорости**). Год спустя к этой проблеме вернулся Рэлей. Он нашел, как групповая скорость зависит от дисперсии, и получил формулу, которую мы сейчас выведем.

Сначала Рэлей предельно упрощает задачу: «Допустим, что имеются две последовательности волн одинаковой амплитуды, но различной длины, распространяющиеся в одном и том же направлении. Тогда

$$\begin{aligned}
 y &= \sin 2\pi \left(\bar{v}t - \frac{x}{\bar{\lambda}} \right) + \sin 2\pi \left(vt - \frac{x}{\lambda} \right) = \\
 &= 2 \cos \left\{ \pi \left[(\bar{v} - v)t - x \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right\} \cos \left\{ \pi \left[(\bar{v} + v)t - x \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Если $\Delta v = \bar{v} - v$ и $\Delta \lambda = \bar{\lambda} - \lambda$ малы, то мы имеем волну, амплитуда которой медленно изменяется от точки к точке между значениями 0 и 2, образуя ряд групп, определенных друг от друга областями, сравнительно свободными от возмущения (рис. 5.9). В случае струны или столба воздуха λ изменяется обратно пропорционально v . Тогда группы движутся

*) Впервые это понятие для волн в дискретной решетке ввел Гамильтон, рассказавший о своей работе на заседании Ирландской академии в 1839 г. и опубликовавший два кратких сообщения. В его бумагах, найденных и опубликованных 100 лет спустя, содержалась очень подробно разработанная теория групповой скорости таких волн.

вперед с той же самой скоростью, что и составляющие их волны, и тип колебаний не изменяется.

Иначе обстоит дело, когда скорость распространения является функцией длины волны λ . Положение в момент t середины группы, которая первоначально находилась в начале, определяется уравнением»

$$t \Delta v + \frac{x \Delta \lambda}{\bar{\lambda} \lambda} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость группы, т. е. скорость точки A на рис. 5.9, равна

$$u = \frac{x}{t} = -\lambda^2 \frac{\Delta v}{\Delta \lambda}$$

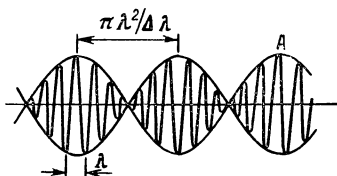


Рис. 5.9

(мы воспользовались малостью $\Delta \lambda$ и заменили $\bar{\lambda} \lambda$ на λ^2). Это рассуждение, со слегка измененными обозначениями, взято из книги Рэлея «Теория звука», первой и одной из лучших книг по общей теории колебаний и волн*).

Немного преобразуем формулу Рэлея, чтобы привести ее к более удобному и красивому виду. Вспомнив, что $v = v\lambda$, где v и v — некоторые известные функции от λ , находим, что при изменении λ на малую величину $\Delta \lambda$ приращение Δv можно выразить через Δv : $\Delta v = \lambda \Delta v + v \Delta \lambda$, или

$$\frac{\Delta v}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta v}{\Delta \lambda} - \frac{v}{\lambda}.$$

Заменяя здесь $v\lambda$ на v и подставляя в формулу Рэлея, получим соотношение, связывающее *групповую скорость* u со скоростью гармонической волны v (последнюю обычно называют *фазовой скоростью*):

$$\frac{v - u}{\lambda} \approx \frac{\Delta v}{\Delta \lambda} \approx v'(\lambda). \quad (5.23)$$

Смысл этой простой формулы состоит в том, что скорость группы, в которой средняя длина волн входящих в нее гармоник близка к λ , определяется производной фазовой скорости $v(\lambda)$ по λ при значении λ , равном средней длине волны группы.

*) Современники Рэлея не сумели вполне оценить, что с появлением этой книги зародилось общее учение о колебаниях и волнах. Даже Гельмгольц, которому книга очень понравилась, считал, что это просто очень хорошая книга по акустике.

Групповую скорость легко определять по графику функции $v(\lambda)$ (рис. 5.8). Пусть средняя длина волны группы равна λ_2 . Проведем из точки O_2 касательную до пересечения с осью λ . Точка пересечения и дает групповую скорость, которая в этом случае меньше фазовой.

Упражнение: докажите, что при $\lambda \gg \lambda_{\min}$ из формул (5.22) и (5.23) следует, что $u \approx v/2$. Попробуйте проверить это соотношение наблюдениями. Точно такое построение можно выполнить и для длин волн, меньших λ_{\min} . При $\lambda = \lambda_{\min}$ фазовая и групповая скорости, как видно из рисунка, совпадают.

Нетрудно убедиться, что для изученных нами волн на воде групповая скорость u всегда положительна, т. е. группы бегут в ту же сторону, что и волны. Однако, если наклон графика $v(\lambda)$ достаточно большой, то групповая скорость могла бы стать отрицательной. В этом нет ничего сверхъестественного или парадоксального. Просто основная волна длины λ (в радиотехнике ее называют несущей) бежит направо, а вершина огибающей ее кривой, обозначенной на рис. 5.9 штриховой линией (в радиотехнике ее называют модулирующей), бежит налево. Это произойдет, если при $\lambda = \lambda_2$ будет выполнено условие $\operatorname{tg} \alpha > v(\lambda_2)/\lambda_2$ (см. $\Delta O_2 O'_2 u(\lambda_2)$ на рис. 5.8). Так как $\operatorname{tg} \alpha = v'(\lambda_2)$, то заключаем, что групповая скорость отрицательна, если группа образована волнами со средней длиной, удовлетворяющей условию $v'(\lambda) > v(\lambda)/\lambda$.

Для длинных гравитационных волн на воде все это мог бы понять еще Ньютон, но реально понадобилось двести лет, чтобы выяснить, как много содержит в себе простое утверждение «скорость волн пропорциональна корню квадратному из их длин». Ньютон, считавший свет потоком частиц, не мог связать изученную им дисперсию света с зависимостью скорости волн на воде от их длины. Лишь через полтора столетия эта связь была замечена, и только к концу прошлого века стало окончательно ясно, что дисперсия, как и другие волновые явления (интерференция, дифракция), проявляется в любых волновых процессах. Понятие о дисперсии и групповой скорости получило после этого многочисленные применения в других областях физики — в оптике, радиофизике, квантовой теории и т. д. Тем не менее реальное использование понятия о групповой скорости и сегодня может вызывать трудности.

Очень ясно и, как всегда, образно сказал о тонкости понятия групповой скорости Л. И. Мандельштам в курсе лекций 1944 г., который он уже не смог закончить. «Скорость — понятие, возникшее при описании движения частицы. Оно является совершенно ясным и имеет смысл при том условии, что существует возможность отождествления частицы, т. е. в лю-

бой точке пространства мы можем утверждать, что это та же самая частица. При распространении волны мы имеем дело с перемещением не частицы, а состояния. Чтобы говорить о скорости, нужно иметь возможность и средства для отождествления состояния. В среде без дисперсии... всякое возмущение распространяется без изменения формы, поэтому возможность отождествления здесь очевидна. Но в среде с дисперсией возмущение по мере распространения деформируется, и здесь уже нельзя без дальнейшего обсуждения сказать, чему равна скорость. Нужно сначала определить, что мы в каждом таком случае будем называть скоростью распространения. Например, для движения облака нет однозначного понятия скорости. Это может быть и скорость края облака. Примерно так же обстоит дело и со скоростью возмущения.

То, что было найдено нами, относится к скорости распространения «переменной амплитуды», и эта скорость (групповая) имеет смысл только при условии неизменности группы при ее перемещении. В диспергирующей среде такой неизменности нет*), но при выполнении условий, о которых мы говорили (достаточно медленное изменение амплитуды, т. е. малое ее изменение на длине волны, и достаточно пологий ход дисперсии), деформация группы также происходит медленно, и тогда для не слишком больших расстояний понятие групповой скорости приблизительно описывает распространение группы. Во всяком случае всегда, когда есть дисперсия, понятие скорости теряет однозначность. Можно по-разному определить скорость, и одно из определений... это — групповая скорость».

При определении скорости отдельного, свободно бегущего солитона никакой неоднозначности нет. Солитон — не облако! Солитон, в отличие от группы волн в диспергирующей среде, сохраняет форму, и его скорость можно определить точно так же, как скорость обычной частицы (пока он не сталкивается с другими солитонами или с препятствиями). Что же происходит с гармониками, на которые можно разложить солитон? О таком разложении можно говорить лишь приблизительно, пока нелинейность, приводящая к взаимодействию между гармониками, достаточно мала. Если при этом мала и дисперсия, то может случиться, что энергия «перекачивается» от гармоник, бегущих с большей скоростью, к более медленным гармоникам. Если такая перекачка уравнивает дефор-

*) Здесь Мандельштам подразумевает, что группа изолирована от других, вроде солитона. Последовательности групп, рассмотренные нами (по Рэлею), сохраняют свою форму.

мацию, вызванную дисперсией, то может возникнуть солитон. Примерно так можно представлять себе солитон Рассела и некоторые другие солитоны.

Сколько энергии в волне

Прежде чем окончательно заняться солитонами, мы должны ответить на еще один вопрос. Что такое энергия волн и что с ней происходит при распространении волн или групп волн? Как находить энергию волны, легко понять на модели грузиков и пружин. Энергия складывается из кинетической энергии грузиков и потенциальной энергии пружин. Для каждой заданной волны эту энергию нетрудно вычислить. Если речь идет о периодической волне, то энергией ее естественно называть полную энергию, сосредоточенную на одном ее периоде, т. е. для синусоидальной волны — на ее длине. Энергия волнового импульса, энергия ограниченной группы волн или энергия солитона определяется как энергия возбужденной части среды. В этом случае предполагается, что возбуждение быстро убывает на больших расстояниях от «центра» импульса или группы, так что полная энергия конечна (не обращается в бесконечность).

Вычислим для примера энергию длинной волны в пружинной модели Ньютона (рис. 5.1). Кинетическая энергия n -го грузика равна $m\dot{y}_n^2/2$. Если по цепочке бежит волна с амплитудой A и длиной λ , то

$$y_n = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} an \right).$$

Энергия, приходящаяся на длину волны, не зависит от момента, в который мы ее вычисляем. Вычислим поэтому энергию в момент $t = 0$. Так как $\lambda \gg a$, то можно положить $\lambda = Na$, где N — большое целое число. Тогда кинетическая энергия n -го грузика равна

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{n}{N} \right),$$

а энергия N грузиков, приходящихся на длину λ , равна сумме этих энергий. Сумму легко вычислить, вспомнив формулу для косинуса двойного угла, из которой следует, что $2 \cos^2 (2\pi n/N) = 1 + \cos (4\pi n/N)$. Так как сумма членов $\cos (4\pi n/N)$ равна нулю (докажите!), то для кинетической энергии находим

$$T = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{\lambda}{4} \rho_1 \omega^2 A^2,$$

где $\rho_1 = m/a$ — линейная плотность цепочки.

Точно так же можно вычислить сумму потенциальных энергий пружин $k(y_{n+1} - y_n)^2/2$, хотя вычисление немного сложнее. Оставив это вычисление читателю в качестве упражнения, заметим, что результат получится очень простой: *потенциальная энергия U равна кинетической*. Это верно для всех бегущих синусоидальных волн, в которых частицы среды качаются как линейные маятники. На самом деле для бегущей синусоидальной волны можно доказать и большее: кинетическая и потенциальная энергии равны не только в среднем*), но и для каждого отдельного грузика в каждый момент времени. Для дискретной модели это верно приближенно, при достаточно большом значении $N = \lambda/a$. В непрерывном пределе это утверждение становится точным.

В нормальных модах стоячей волны кинетическая и потенциальная энергии всей системы равны только в среднем по времени. Это можно проверить, воспользовавшись найденным нами раньше решением (5.7) (вспомните, что $2\cos^2(\omega Mt) = 1 + \cos(2\omega Mt)$, а среднее значение $\cos(2\omega Mt)$ за период равно нулю). В остальном энергия стоячей волны определяется точно так же, как и энергия бегущей волны. Разумеется, можно определить энергию периодических бегущих и стоячих волн произвольной формы, хотя простыми формулами этого не опишешь.

Полезно представлять себе, как выглядит выражение для энергии волны в «непрерывном» пределе, когда из цепочки грузиков получается упругий стержень. Попробуйте сделать это самостоятельно, вспомнив переход от уравнений (5.12) к (5.13). Полная энергия волны в малом кусочке стержня длины Δx равна

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} \rho_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} K y'^2 \right) \Delta x. \quad (5.24)$$

Здесь первый член соответствует кинетической энергии грузиков, а второй — потенциальной энергии пружинок. Суммируя вклады малых кусочков, можно найти полную энергию куска волны, группы волн или солитона. Если на частицы действует какая-то внешняя сила (электрическое поле, поле силы тяжести и т. д.), нужно добавить к ΔE соответствующую величину потенциальной энергии.

Как видим, энергия, запасенная в волне, определяется просто. Сложнее обстоит дело с переносом энергии волной,

*) Имеется в виду усреднение по времени (за период) или по длине (на длине волны). Для бегущей волны эти средние равны.

и об этой проблеме долго не утихали споры, отголоски которых докатились и до наших дней. Первое ясное решение задачи о переносе энергии в упругих средах дал Н. А. Умов в 1874 г. Однако его работа была опубликована отдельной брошюрой в Одессе и долгие годы оставалась незамеченной. Независимо от Умова английский физик Осборн Рейнольдс (1842–1912), наиболее известный своими работами по гидродинамике, рассмотрел под влиянием Рэлея вопрос о том, как переносится энергия волнами в жидкости (1877 г.). Он связал перенос энергии с давлением бегущей волны, вычислил это давление и показал, что энергия распространяется не с фазовой скоростью, а с групповой. Эта мысль была подхвачена Джоном Пойнтингом (1852–1914), который нашел уравнения переноса энергий электромагнитного поля. Из них, в частности, следовало, что электромагнитная волна также должна оказывать давление. Многим, в том числе и знаменитому Кельвину, показалось, что это доказывает несостоятельность теории Максвелла. Все разъяснилось лишь после опытов Лебедева. Для нас, знающих, что свет состоит из фотонов, представление о переносе энергии электромагнитным полем и о световом давлении кажется самоочевидным. Однако на языке теории волн, распространяющихся в среде, все выглядело сложнее, так как понятие об энергии, как и понятие о скорости, тоже заимствовано из теории частиц.

В последней лекции Л. И. Мандельштама, прочитанной за месяц до смерти, подробно разбирается и этот вопрос. Природа затруднения связана с тем, что рассматривается бесконечная синусоидальная волна, которую «можно представить моделью, состоящей из набора одинаковых, не связанных друг с другом маятников (Рейнольдс). В этой цепочке маятников можно создать такую последовательность фаз, что форма колебаний будет в точности соответствовать бегущей синусоидальной волне, однако никакой передачи энергии здесь не происходит. В произвольном объеме, через который проходит синусоидальная волна, энергия будет оставаться все время постоянной». Затруднение исчезает, если вспомнить, что всякая физическая волна не бесконечна в пространстве, а представляет собой группу волн. Любая такая группа переносит энергию, и скорость распространения энергии, очевидно, равна групповой скорости*). Эффектным следствием этого является возможность движения энергии и фазы волны в противоположные стороны при отрицательной групповой скорости. Ничего

*) По этой причине Гамильтон называл групповую скорость «скоростью, которой свет побеждает тьму».

парадоксального в этом нет, просто фазовая скорость еще ничего не говорит о потоке энергии.

В случае свободно бегущего солитона вообще нет никакой проблемы с энергией. Солитон ведет себя как частица, и его энергия всегда при нем. В этом он подобен группе волн, однако, чтобы в дальнейшем не было недоразумений, еще раз напомним, что сходство это чисто внешнее. Рассмотрим два импульса, бегущих навстречу друг другу по струне Д'Аламбера. В момент $t = 0$ они расположены в точках $-x_0$ и x_0 (рис. 5.10). Через время $t_1 = x_0/v$ они сольются в точке O , причем форма суммарного импульса определяется простым сложением функций, описывающих каждый импульс. В момент $t_2 = 2x_0/v$ они поменялись местами и бегут в разные стороны.

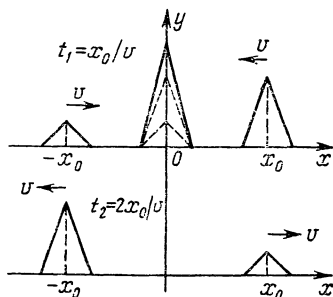


Рис. 5.10

На первый взгляд это столкновение двух импульсов похоже на столкновение солитонов. Однако, в отличие от солитонов, импульсы действительно свободно прошли друг через друга, никак не взаимодействуя. Каждый импульс движется так, как если бы другого просто не было. Кроме того, форма этих импульсов может быть любой, а скорость всегда одна и та же и равна скорости распространения волны по струне. Наоборот, скорость солитона может быть более или менее произвольной, но форма его вполне определенная. Она может зависеть, а может и не зависеть от скорости, но подбирается солитоном как бы «самостоятельно», тогда как форма импульса в струне полностью определяется начальным возбуждением (щипком, ударом). Наконец, и это самое главное, обычный импульс может существовать только в идеальной струне. Малейшая дисперсия постепенно «размывает» его, нелинейность исказит его форму до неузнаваемости, не говоря уже о «стирающем влиянии» трения. Солитоны же существуют благодаря нелинейности, приспосабливаются к дисперсии и остаются солитонами даже под действием трения, только постепенно «ослабевают» и «умирают». Сколь же удивительны те солитоны, которые не может разрушить даже сила трения! Этим стойким солитонам и посвящается следующая глава.

НАСТОЯЩЕЕ И БУДУЩЕЕ СОЛИТОНОВ

В науках же и искусствах... все должно шуметь новыми работами и дальнейшим продвижением вперед.

Френсис Бэкон

Глава 6

СОЛИТОНЫ ФРЕНКЕЛЯ

Итак, вернемся в наш XX в. и обратимся к новым работам и новым идеям. Большинство новых идей, относящихся к солитонам, зародилось в умах физиков-теоретиков. С некоторыми такими идеями мы теперь познакомимся.

Что такое теоретическая физика

Из всех услуг, которые могут быть оказаны науке, введение новых идей — самая важная.

Дж. Дж. Томсон

До сих пор мы говорили о физиках или математиках. Кто же такие физики-теоретики? Это, очевидно, люди, которые занимаются теоретической физикой. Тогда что такое теоретическая физика? Я. И. Френкель как-то определил предмет теоретической физики так: «Физическая теория подобна костюму, сшитому для природы. Хорошая теория подобна хорошо сшитому костюму, а плохая — тришкиному кафтану. Физик-теоретик подобен портному». В этом определении, конечно, чувствуется влияние Козьмы Пруткова, и в другом месте Френкель дал более серьезное определение профессии физика-теоретика: «...если отрицательной характеристикой физика-теоретика является неумение ставить физические эксперименты, то положительной... является широкая энциклопедичность в вопросах физики, соединенная с достаточной математической вооруженностью. В зависимости от соотношения между этими двумя факторами физик-теоретик может приближаться по своему профилю либо к физику-экспериментатору, либо к математику. Последних обычно относят к специалистам по математической физике».

Это деление достаточно условно, но если принять его, можно сказать, что физик-теоретик осмысливает добытые на опыте факты, рисует на них, говоря словами Френкеля, «карикатуру» и пытается облачить эту карикатуру в некий «математический костюм». Иными словами, он переводит с невинного языка природы на точный и ясный язык математики. Коль скоро эта задача решена, теория переходит во владения математической физики для окончательной отделки и извлечения многочисленных полезных следствий.

Другая, не менее важная задача физика-теоретика — «допрашивать природу» (Ф. Бэкон), ставить новые задачи перед экспериментаторами. Ясно, что разумный вопрос можно поставить только в том случае, если есть какая-то теория или хотя бы правдоподобная гипотеза.

«Природа с красоты своей покрова снять не позволяет. И ты машинами не вынудишь у ней, чего твой дух не угадает.» Так когда-то сказал об отношениях между природой и допрашивающим ее человеком философ и поэт Владимир Соловьев (1853—1900), окончивший физико-математический факультет Московского университета.

Поэты вообще склонны подчеркивать трудности общения с природой — «равнодушная природа» (А. С. Пушкин), «природа-сфинкс» (Ф. И. Тютчев). Подход физика-теоретика можно назвать более практическим. Берясь за какую-либо проблему, он сначала пытается понять, на что похожа эта новая проблема, ищет аналогии с тем, что уже известно и изучено. Здесь очень пригодится как широкая энциклопедичность, так и математическая вооруженность. Как мы уже видели, часто это приводит к успеху. Однако бывает, что этого недостаточно, и нужно угадать нечто необычное, сделать какой-то «нелогичный» скачок.

«Желание понять, как это ни парадоксально, является лишь выражением нашего консерватизма, нашего нежелания допустить существование чего-то такого, что не укладывается в знакомую схему... Вот почему прогресс науки часто обязан радикально настроенным теоретикам, ломающим старые схемы и открывающим путь к новым фактам...» Это высказывание Я. И. Френкеля относится не только к физике, но и к другим наукам, не только к большим научным проблемам, но и к скромным малым задачам. Многим, наверное, знакомо чувство внезапного «озарения», когда что-то не поддававшееся умственным усилиям вдруг стало совершенно ясным. О таком скачке и идет речь.

Один из моих друзей определил практика как человека, ничего не понимающего в теории, а теоретика — как мечтателя, вообще не понимающего ничего.

Л. Больцман

Отделение теоретической физики от общей или экспериментальной физики произошло на грани XIX—XX вв., когда появились первые курсы теоретической физики. Один из первых физиков-теоретиков Дж. К. Максвелл вовсе не считал себя и, пожалуй, и не был — чистым теоретиком*). В его «Трактате об электричестве и магнетизме» мирно сосуществуют опыт, механические модели и весьма математизированная теория». Может быть поэтому его труд смогли прочесть и полностью понять лишь немногие избранные, которые и извлекли из него самое существенное — новую теорию. Возможно, в этот момент и совершилось окончательное отделение теоретической физики и родилась профессия физика-теоретика. Людвиг Больцман, который первым глубоко понял Максвелла, — классический образец чистого теоретика**).

В нашей стране теоретическая физика сформировалась несколько позже, в основном усилиями нескольких ученых, родившихся в последнее десятилетие прошлого века, и молодых, ярких талантов, вступивших в науку примерно на десятилетие позже. Все эти люди были очень талантливыми и очень разными. Одни вошли в науку очень быстро. Путь других, особенно старшего поколения, был более долгим и сложным, но всех объединяла бескорыстная увлеченность, одержимость наукой. В результате уже 50 лет назад в нашей стране сложилась сильная, самостоятельная и признанная во всем мире теоретическая физика. Большинство теоретиков работали в тесном контакте с такими же талантливыми и увлеченными экспериментаторами и инженерами, круг их интересов был необычайно широк. Если попытаться в нескольких словах выразить основное настроение физиков в эту эпоху «бури и натиска», то можно сказать, что для них, как и для их предшественников, о которых мы говорили в первой главе, девизом было: «Все можно понять, объяснить, изобрести, сделать, нет ничего невозможного».

*) На доме в Эдинбурге, в котором он родился, помещена мемориальная доска: «Джеймс Клерк Максвелл, естествоиспытатель. Родился здесь 13 июня 1831 г.».

**) Впрочем, Л. Больцман был не совсем чужд практики. Известно, например, что он сконструировал для своей жены электрическую швейную машину. Отметим, что теоретик нашего времени Я. И. Френкель испытывал большие затруднения, если надо было заменить электрические пробки.

Идеи Я. И. Френкеля

В квантовой физике, да и в теоретической физике вообще, пожалуй, не было вопросов, которыми не занимался бы Яков Ильич. Он был средоточием новых физических идей...

И. К. Кикоин

Яков Ильич Френкель (1894—1952) занимает свое особое место в созвездии неповторимых талантов этой эпохи. «Как музыкант уже по первым тактам узнает Моцарта, Бетховена, Шуберта, так и математик по нескольким страницам отличит своего Коши, Гаусса, Якоби, Гельмгольца» (Л. Больцман). Точно так же физик-теоретик легко узнает «почерк» Френкеля, Фока, Боголюбова, Ландау. Особенность Френкеля как теоретика — применение очень простых и оригинальных моделей при использовании минимального математического аппарата. Говорят, что Ландау как-то пошутил: «Фок любую задачу сводит к уравнениям с частными производными, я — к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а Френкель — к алгебраическим».

Любовь к моделям и аналогиям, чрезвычайно острая наблюдательность, склонность к объяснению не только физических опытов, но и явлений окружающего нас мира несомненно роднят Френкеля с естествоиспытателями девятнадцатого века. С таким же детским любопытством он наблюдал и старался объяснить явления окружающего мира. По воспоминаниям В. Я. Френкеля*) идеи многих работ Я. И. Френкеля возникали из таких наблюдений: «Иногда такого рода наблюдения Яков Ильич проводил и дома. Вспоминается, как он подошел к электроплитке, на которой в алюминиевом тазу грелась вода. Дно таза было буквально усеяно мелкими пузырьками, и Яков Ильич, присев на корточки, внимательно следил, как они всплывают, отрываясь от дна, как вода начинает закипать. Или за ужином, придвинув к себе стакан крепкого горячего чая, наблюдал за пленкой на поверхности чая, которая периодически покрывалась какими-то извилистыми трещинами, вдруг, как по команде, разбегавшимися в разные стороны. Объектами таких наблюдений бывала и лаборатория природы: структура дна на мелях Рижского залива с характерными волнистыми узорами... Иногда в этой упорядоченной структуре намечались дефекты, обрывы, наломающие картинки *дислокаций*».

*) Многие из приведенных здесь высказываний Я. И. Френкеля заимствованы из книги: *Френкель В. Я. «Яков Ильич Френкель»*. — М.—Л.: Наука, 1966.



Яков Ильич
Френкель
(1894 — 1952)

Работы Френкеля часто были связаны с наблюдениями явлений природы — облаков, молний, вихрей и водоворотов... Некоторым такое пристрастие к «пузырькам и каплям» казалось смешным и несовременным в век квантовой физики. Однако время показало, что многие модели Френкеля чрезвычайно живучи и плодотворны. Он обладал даром увидеть новое и неожиданное в самых, казалось бы, знакомых и общеизвестных явлениях и сам очень ясно сознавал эту устремленность в будущее: «Познавая законы природы, мы должны научиться видеть не столько старое в новом, сколько новое в старом».

Хотя круг интересов Якова Ильича был невероятно широк — от шаровой молнии до распадов атомного ядра все волновало его ум и порождало в нем новые идеи — наибольших успехов добился он в теории твердых тел и теории жидкостей. Здесь он высказал несколько основных идей. Лауреат Нобелевской премии профессор Невилл Мотт, возглавлявший, между прочим, в течение многих лет Кавендишскую лабораторию (после Максвелла, Рэлея, Дж. Дж. Томсона, Резерфорда и Л. Брэгга), сказал о вкладе в физику твердого тела Я. И. Френкеля так: «Я. Френкель был одним из основоположников физики твердого тела... В Англии каждый студент-физик знает *«о дефектах по Френкелю»*... — это узел в кристаллической решетке, оставленный атомом или ионом... и блуждающий по кристаллу... Эта идея вообще одна из фундаментальных идей в физике...»

В ней самое важное для нас — мысль о том, что «пустое место», «дырка» в решетке может перемещаться по кристаллу подобно частице*)! Этот вывод высказан уже в работе 1926 г.: «Принимая во внимание подвижность дырок, можно рассматривать их как своего рода «отрицательные атомы...»

Представление о дырке как частице оказалось исключительно плодотворным. Вскоре понятие о дырке в «море» заполненных состояний было применено П. Дираком для создания теории антиэлектронов, т. е. позитронов. Фундаментальную роль

*) См. книгу: Бокштейн Б. С. Атомы блуждают по кристаллу. — М.: Наука, 1984. — Библиотечка «Квант», вып. 28.

играет идея о «дырках» и в теории полупроводников. Конечно, вполне оценить значение такой простой, но парадоксальной идеи о «дырках» в свое время было не так-то просто. Лишь дальнейшие исследования выявили всю ее глубину. Такой же была судьба и многих других идей Френкеля, в том числе и модели Френкеля — Конторовой.

Атомная модель движущейся дислокации по Френкелю и Конторовой

..что такое теория? Неспециалисту бросается в глаза... что она окружена грудой формул, ничего не говорящих непосвященному. Но эти формулы не составляют ее существо.

Л. Больцман

Солитон, или дислокация ФК, — это особого рода дефект в кристаллической структуре твердого тела. Если стремиться к точности, то лучше сказать, что это модель такого дефекта в простейшей мыслимой модели (карикатуре) твердого тела. Забегая вперед, сразу скажем, что эта карикатура очень удачная и позволяет качественно понять многие свойства реальных твердых тел.

Предельный случай *дислокации* (от лат. *dislocatio* — смещение) — это «дырка» в кристаллической решетке. Как уже говорилось, такая дырка может перемещаться по кристаллу. Перемещение затрудняется тем, что для переброса какого-нибудь соседнего атома на пустое место нужно сначала его достаточно сильно «раскачать», чтобы он мог оторваться от окружающих его атомов. Гораздо легче перемещается дефект, в котором атомы вокруг «дырки» также смещены. Такой дефект и есть дислокация.

Совсем простую модель дислокации можно сделать так. Представим себе периодическую последовательность горок и ложбинок (см. рис. 6.1, *a*). Пусть в ложбинках лежат шарики, связанные упругими пружинками. Эти шарики изображают слой «атомов», а пружинки изображают силы, связывающие атомы этого слоя друг с другом. Атомы, изображенные шариками, на самом деле взаимодействуют с атомами другого слоя, изображенными крестиками. Вместо сил взаимодействия верхнего слоя с нижним, мы построили горки, изображающие это взаимодействие. Атомы нижнего слоя считаются неподвижными.

Ясно, что в этой системе не может быть просто «дырки», т. е. не может случиться так, чтобы одна ямка была пустой, а во всех остальных атомы лежали бы на дне. Вместо этого равновесие может установиться в состоянии, изображенном на рис. 6.1, *б*. Это и есть дислокация Френкеля — Конторовой.

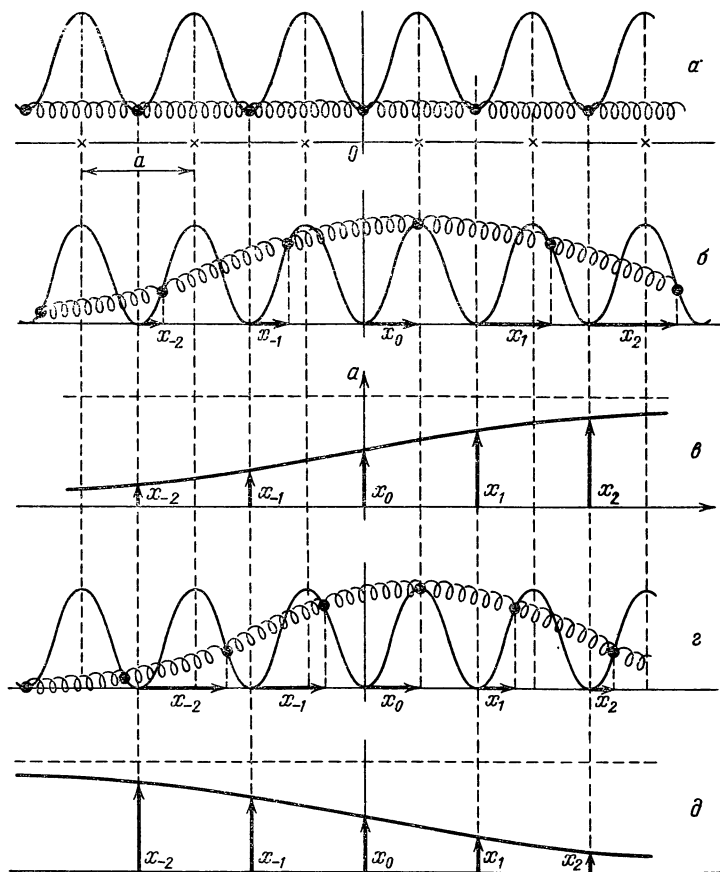


Рис. 6.1

Если в центре каждой ямки отложить по вертикальной оси смещение каждого атома (рис. 6.1, в), то ясно видно, что огибающая кривая напоминает график движения маятника, соответствующего сепаратрисе (рис. 4.15)*. Чуть позже мы убедимся, что слово «напоминает» можно заменить на «совпадает», если дислокация простирается на расстояние,

*) Такие движения называют «асимптотическими», имея в виду, что график движения приближается к прямой, соответствующей положению равновесия, подобно тому как гипербола приближается к своей асимптоте (например, на рис. 4.11 асимптоты гиперболы — оси Ox и Oy).

много большее расстояния между атомами. В предельном случае, когда пружинки очень мягкие, дислокация ФК превращается в «дырку» по Френкелю.

На рис. 6.1, б и в изображена дислокация, в которой вблизи точки O «меньше» атомов, чем в недеформированном состоянии (рис. 6.1, а). Может случиться и так, что вместо этого образуется «сгущение» атомов, как изображено на рис. 6.1, г и д. График смещений атомов в такой дислокации также соответствует асимптотическому движению маятника, но в обратном направлении. В предельном случае мягких пружин получается состояние, в котором одна ямка содержит лишний атом.

На самом деле понятие дефекта по Френкелю включает пару — дырку с ячейку с лишним атомом. Их можно считать как бы «частицей» и «античастицей», родившимися в тот момент, когда один из атомов перескочил в соседнюю ячейку. Эта пара может разойтись, и тогда можно говорить отдельно о «дырке» или «сгущении». Точно так же и распределенные дефекты-дислокации могут порождаться и уничтожаться парами. Дислокацию разрежения условимся называть «положительной» или просто дислокацией. Дислокацию сгущения назовем «отрицательной» или антидислокацией.

Дислокация, размер которой значительно превышает шаг решетки a , свободно перемещается. Чтобы сдвинуть всю дислокацию на расстояние a , нужно сместить каждый атом на относительно малую длину; при этом нужно затратить совсем немного энергии. Таким образом, дислокации могут перемещаться по кристаллу как частицы, не изменяя свою форму. Разумеется, это относится к идеальным системам, когда все горбики и ямы одинаковы, а грузики и пружинки также не отличаются друг от друга. Если, однако, один горбик заметно выше других, то ясно, что дислокация будет как бы «отталкиваться» от него и сможет проскочить эту неоднородность только при достаточно большой скорости движения. Наоборот, более низкий, чем другие, горбик будет «притягивать» к себе дислокации. К похожим эффектам могут привести и неоднородности в пружинах и массах грузиков.

Немного поразмыслив, можно понять, что одна дислокация действует на другую как неоднородность. Точнее, две положительные или две отрицательные дислокации как бы «отталкиваются» друг от друга, а положительная и отрицательная — «притягиваются». Притяжение дислокации и антидислокации — вещь довольно очевидная, так как в дислокации пружины растянуты, а в антидислокации сжаты. Столь же очевидна причина отталкивания «одноименных» дислокаций. Психоло-

гически легче понять, как отталкиваются две антидислокации, в которых пружинки сжаты. Однако дислокации отталкиваются точно так же.

Из всего, что пока было сказано, вовсе не очевидно, что такие равновесные конфигурации, как показанные на рис. 6.1,б или 2, существуют. Могло бы случиться и так, что при всяком отклонении грузиков от равновесных положений по цепочке просто бегут волны. Именно так обстоит дело в обычной ньютоновой цепочке (рис. 5.1), в струне и в других линейных одномерных системах. На самом деле точно так же «распадаются» на волны и все достаточно малые начальные отклонения в модели ФК. Все дело здесь именно в «достаточной малости». Действующие на грузики силы тяжести и натяжения пружин могут уравниваться только при больших смещениях атомов. Если каким-то способом создать вначале достаточно большое смещение атомов, скажем, перебросить один или несколько атомов в соседние ямки, то в результате по цепочке побегут волны сжатия и разрежения. Оказывается, что когда мелкие волны убегут далеко, останется некоторое количество дислокаций и антидислокаций, которые сравнительно медленно движутся или покоятся.

Таким образом любое начальное возмущение «распадается» на бегущие волны и несколько дислокаций и антидислокаций. Их форма не зависит от начального возмущения, а определяется лишь параметрами модели (массами грузиков, жесткостью пружин, формой волнистой поверхности).

Взаимодействие дислокаций

Без достаточно сложных математических расчетов невозможно понять, что будет происходить с двумя дислокациями, сталкивающимися друг с другом. Точное решение уравнений показывает, что одноименные дислокации взаимодействуют точно так же, как солитоны Рассела, т. е. подобно сталкивающимся мячам (см. рис. 2.4). Попробуем если и не понять, то хотя бы описать, что происходит, когда на покоящуюся антидислокацию налетает другая антидислокация. Обе дислокации во время «соударения» несколько деформируются. За время их соприкосновения кинетическая энергия налетевшей дислокации перейдет к первоначально покоившейся, которая и начнет двигаться вперед, сохраняя свою форму. В общем, можно сказать, что дислокация подобна мячу. Главное здесь то, что дислокация сохраняет форму. Ее легче сдвинуть, чем деформировать.

На самом деле, как мы скоро увидим, дислокация не деформируется лишь при малой скорости ее движения, много меньшей скорости распространения продольной звуковой волны по цепочке атомов. В общем случае все продольные (по оси, соответствующей направлению движения) размеры дислокации уменьшаются, т. е. $l = l_0 \sqrt{1 - (v/v_0)^2}$, где v — скорость дислокации, v_0 — скорость распространения звука. Зависимость энергии движущейся дислокации от скорости дается формулой $E = m_0 v_0^2 / \sqrt{1 - (v/v_0)^2}$. Как формула для размеров дислокации, так и формула для энергии аналогичны соответствующим формулам специальной теории относительности*). С учетом всего, что мы узнали о дислокациях, можно сказать, что дислокация подобна элементарной частице. В довершение этой поразительной аналогии, имеются еще и «античастицы» — антидислокации!

Как же происходит столкновение дислокации с антидислокацией? Когда антидислокация (антисолитон) \bar{D} налетает слева на покоящуюся дислокацию D (солитон), то сжатые в \bar{D} пружины распрямляются, из \bar{D} в D пробегает волна сжатия, которая превращает D в \bar{D} и наоборот. Все эти события происходят очень быстро, так как передача энергии от \bar{D} к D и распространение волны сжатия, превращающей D в \bar{D} и \bar{D} в D , происходят со скоростью звука. Если начальная скорость налетающего солитона намного меньше скорости звука, то оба солитона не успеют заметно изменить свою форму и разлетятся, как мячи. В результате налетевший антисолитон \bar{D} превратился в солитон D и остановился несколько левее положения первоначально покоившегося солитона D . Тот, в свою очередь, превратился в антисолитон \bar{D} и летит направо, занимая положение немного правее того, которое занимал бы налетающий антисолитон, если бы не было столкновения. Таким образом, мы совершенно ясно видим, что ничего похожего на прохождение одного солитона «сквозь другой» не происходит. Только на первый взгляд может показаться, что солитоны ведут себя как импульсы в струне, движение которых мы изучали в гл. 5.

На примере дислокации особенно ясно видно, что солитон подобен частице. Его движение при слабом взаимодействии с другими солитонами, в основном, определяется законами механики. Нужно только учитывать, что солитоны способны при этом деформироваться и «перекрашиваться» — «положи-

*) Нелишне подчеркнуть, что эта аналогия — чисто математическая. В теории относительности написанные формулы имеют совершенно другой физический смысл. К тому же, для реальных дислокаций они выполняются лишь приближенно.

тельный герой», сталкиваясь с «отрицательным», сам становится «отрицательным», и наоборот.

До сих пор слова «положительная» и «отрицательная» дислокации были просто некоторыми фигуральными выражениями. Замечательно, что им можно придать буквальный смысл, приписав дислокациям соответствующие *заряды*. В положительной дислокации общий эффект смещения атомов такой же, как при образовании дырки. Если бы атомы нижнего неподвижного ряда были электрически заряжены положительно, а верхнего — отрицательно, то дислокация, как и дырка, переносила бы положительный электрический заряд. Независимо от того, заряжены или не заряжены атомы, припишем дислокации (как и дырке) заряд $+1$. Тогда антидислокации надо приписать заряд -1 . Если есть несколько дислокаций и антидислокаций, то алгебраическая сумма их зарядов будет сохраняться, что бы с ними ни происходило (докажите это утверждение!). Конечно, выбор для зарядов дислокаций значений $+1$ — дело соглашения. Ясно также, что сравнивать заряды дислокаций можно лишь в одной и той же решетке. В отличие от настоящих частиц, дислокации не существуют вне породившей их среды, и понятие заряда имеет смысл лишь для определенной, заданной решетки.

Читатель, несомненно, уже уловил, куда завело нас исследование совсем простой модели. У нас есть частицы и античастицы, которые могут порождаться и уничтожаться парами. Есть сохраняющиеся заряды, причем одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Есть и нечто похожее на электромагнитные волны. Это, как вы уже, конечно, догадались — бегущие волны с малой амплитудой колебаний грузиков, когда грузики колеблются вблизи своих положений равновесия. Иначе говоря, это просто звуковые волны*), распространяющиеся в нашей «среде» из грузиков и пружин.

В общем, мы создали целый мир. Конечно, это довольно простой мир. Трудно себе представить, чтобы из таких элементарных частиц могли бы возникнуть, скажем, мыслящие существа. Одномерность этого «мира» сильно ограничивает возможности образования достаточно сложных структур (не случайно мы с вами трехмерны!). Тем не менее не

*) В отличие от обычных звуковых волн, эти волны сильно диспергируют при больших значениях λ . Как и для волн на глубокой воде, их фазовая скорость v растет с ростом λ . Позже мы получим соответствующую дисперсионную формулу, а пока этим отличием можно пренебречь.

нужно и недооценивать возможности этой простой модели. В конце этой книги мы познакомимся с некоторыми идеями применения подобных одномерных систем, а в следующем разделе увидим, что даже в самом простом «мире» может существовать очень своеобразный «атом», построенный из дислокации и антидислокации.

«Живой» солитонный атом

Естественно думать, что дислокация D и антидислокация \bar{D} могут притянуться и образовать некоторую связанную, неразлучную пару, нечто вроде атома водорода (или, скорее, «атома» позитрония, т. е. атома водорода, в котором протон заменен на позитрон). Тут, однако, сразу возникает непростой вопрос: а не уничтожат ли дислокация и антидислокация друг друга? С атомом водорода такая катастрофа невозможна, так как протон и электрон не являются античастицами друг для друга. Наоборот, жизнь пары из электрона и позитрона в позитронии довольно короткая. Электрон и позитрон в конце концов сливаются друг с другом (т. е. аннигилируют) и превращаются в фотоны. Вообще говоря, такая судьба грозит и солитонному атому. Однако в «непрерывной» модели Френкеля и Конторовой, о которой речь пойдет ниже, могут образоваться солитонные атомы, живущие бесконечно долго. Эти атомы устроены довольно хитро, и без математики их не получишь. Однако описать их очень просто.

Допустим, в начальный момент слева стоит солитон D , а справа около него — антисолитон \bar{D} . Смещения атомов изображены на рис. 6.2, а, где по вертикальной оси отложено смещение в единицах расстояния a , т. е. y/a . На оси x изображены также реальные смещения атомов. Справа атомы сгущены, а слева разрежены. Теперь ясно, что налево пойдет волна сгущения, и через некоторое время получится картинка, изображенная на рис. 6.2, б. Все происходит так же, как при столкновении движущегося солитона с покоящимся антисолитоном, но теперь нет запаса кинетической энергии, который

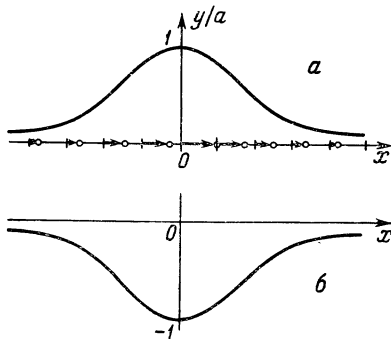


Рис. 6.2

позволил бы им оторваться. В результате образуется стоящее на месте пульсирующее состояние. Его называют *бризером* (от англ. *breath* — дышать, одно из значений слова *breather* — живое существо) или *бионом* («живая частица»). Бризер внешне выглядит как стоячая волна. Странно в этой волне то, что ее ничто не удерживает на краях. Можете ли вы представить подобную вещь на поверхности воды? Конечно, нет. К сожалению, на воде таких удивительных «живых существ» действительно не бывает.

Другая удивительная особенность этой стоячей волны состоит в том, что она тоже ведет себя как частица! Бризер может равномерно двигаться. Он ускоряется или замедляется вблизи неоднородностей. При столкновениях с солитонами или другими бризерами также ведет себя как частица. С другой стороны, в бризере наглядно проявляется волновая природа солитонов. Бризер нельзя описать просто как две частицы D и \bar{D} , связанные пружинкой. «Внутри» него действительно пульсирует стоячая волна сжатий и разрежений «среды».

Здесь, похоже, внимательный читатель не может уже сдержать желания задать автору несколько вопросов.

Диалог читателя с автором

Читатель. Мне трудно уследить за скачками Вашей мысли. Вы довольно долго убеждали меня, что солитон — частица. Теперь скажите, что я должен думать о бризере? Это ведь явно стоячая волна, хотя и не совсем обычная. В то же время, если я правильно понял, бризер тоже настоящий солитон, такой же, как солитон Рассела или дислокация Френкеля. Что же все-таки солитон — частица или волна?

Автор. Если сказать кратко, то солитон — не частица и не волна. Солитон — это солитон, новый объект физического мира. Однако многие солитоны рождаются «из волн» и наследуют некоторые свойства волн. Для понимания многих свойств солитонов помнить об их волновом происхождении не только полезно, но порой и необходимо. С другой стороны, солитоны движутся и сталкиваются как частицы, но частицы эти, как мы видели, очень необычные. Дислокация, например, имеет конечный размер, но ее нельзя разбить на меньшие части, она неделима.

Читатель. Но это совершенно непонятно! Дислокация, в конце концов, состоит из грузиков и пружин. Где же тут неделимость?

Автор. Я позволю себе ответить на вопрос вопросом. Помните ли Вы улыбку Чеширского Кота из знаменитой книги Льюиса Кэрролла? *).

«...Первым исчез кончик его хвоста, а последней — улыбка; она долго парила в воздухе, когда все остальное уже пропало. — Д-да! — подумала Алиса. — Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота! Такого я в жизни еще не встречала».

Так вот, грузики и пружинки — это кот, а дислокация — его улыбка. Ясно, что улыбка относится к состоянию кота, но она не состоит из кота, и она, конечно, «неделима» — либо она есть, либо ее нет! Когда я говорю о дислокации как о солитоне, я как раз и имею в виду «улыбку без кота». Дело здесь не только в том, что одни и те же солитоны, описываемые совершенно одинаковыми математическими уравнениями, могут существовать в самых различных средах. Самое интересное, что можно действительно изучать и, видимо, наблюдать улыбку без кота!

Читатель. Извините, но я опять Вас перебыю. Я, конечно, не думаю, что Вы имеете в виду что-нибудь сверхъестественное. Но в таком случае Вы, по-видимому, хотите сказать о радио, телевидении, голографии и тому подобном. Мне это все объяснять не надо. Вполне понятно, что можно закодировать и кота, и его улыбку, и нашу беседу, и многое другое в электромагнитные волны, и все это сможет существовать само по себе, в вакууме. Это ясно. Мне кажется, что ничто не препятствует и существованию «электромагнитных солитонов». Если это возможно, то Ваша мысль мне совершенно понятна. В конце концов, и сами электромагнитные волны — тоже «улыбка без кота».

Автор. Эта беседа начинает мне нравиться все больше. Вы уже объясняете мне, что я собирался сказать! Хотя я, честно говоря, не думал о телевидении и голографии, но вот с электромагнитными волнами Вы попали почти «в десятку». После того как из физики было изгнано представление об эфире, электромагнитные волны действительно стали «улыбкой без кота». Современная теория пошла дальше. В ней и другие элементарные частицы, например электроны, тоже описываются полями, во многом подобными электромагнитному полю. Есть, конечно, и существенные отличия между этими полями, и самое главное для нас — в законе дисперсии. Электромагнитные волны распространяются в пустоте без

*) Кэрролл Л. Приключения Алисы в Стране Чудес: Пер. с англ. — М.: Книга, 1982.

дисперсии. Скорость группы волн (фотона) равна скорости распространения волн, т. е. скорости света. Волны, описывающие электроны, должны быть устроены так, чтобы группы этих волн (электроны) могли двигаться с любой скоростью, меньшей скорости света. Волны, из которых мы строили дислокации, как раз удовлетворяют этому требованию, только роль скорости света играет скорость звука. Я скоро это покажу, а сейчас только замечу, что эта дисперсия никак не связана с дискретностью цепочки. Вы можете, как это делалось в предыдущей главе, перейти к пределу непрерывной среды, а затем вообще забыть о среде, оставив одно поле.

Читатель. Мне не совсем понятно, что у Вас останется.

Автор. Останется поле, которое в простейшем случае характеризуется функцией $y(t, x)$, описывающей отклонение от равновесия каждой точки среды. Точка зрения теории поля состоит в том, что материальной среды, по которой распространяются волны, нет, а эта функция описывает само распределение вещества, например электронов.

Читатель. Нет, давайте лучше вернемся к солитонам в какой-нибудь среде. К этому я уже привык. А то, что от электрона осталась только функция, я так сразу не могу переварить. Это чересчур абстрактно.

Автор. Беда не в том, что это абстрактно, к этому нужно только привыкнуть; хуже, что для электрона эта картина, строго говоря, неправильна. Если Вы рассматриваете электромагнитное поле, то все эти представления имеют смысл как в обычной классической теории прошлого века, так и в квантовой теории. Поле же, описывающее электроны, имеет смысл только в квантовой теории. Но и там при описании взаимодействия электронов и фотонов возникают большие трудности. Эти трудности еще удалось как-то преодолеть, но вот не менее важную частицу, протон, таким способом, на языке теории поля, совсем не удалось описать. Поэтому и возникла замечательная мысль — а не является ли протон солитоном какого-нибудь поля?

Читатель. Нет, давайте все же закончим наш разговор. Кое-что я, пожалуй, уловил. Вы хотите, чтобы я рассматривал отклонения частиц в модели Френкеля как поле $y(t, x)$, похожее на электромагнитное поле. Тогда периодические волны небольшой амплитуды будут подобны электромагнитным волнам, а дислокации будут частицами... Х-м?... Какими частицами?... Не фотонами же?

Автор. Что Вас смутило? Конечно, это не фотоны! Вы же знаете, что фотоны движутся со скоростью света. Вы можете представлять себе фотон просто как группу волн.

В пустоте скорость этой группы совпадает с фазовой, ну и так далее...

Читатель. Тогда, может быть, дислокации подобны электронам или протонам? У них ведь и заряд есть, и античастицы, и атом из них можно составить?... Нет, это просто здорово! Из одного и того же материала делается все — и фотоны, и электроны... Постойте, постойте! Вы говорили, что эти волны сильно диспергируют. Значит, они не могут быть фотонами!

Автор. Вы хотите понять все чересчур буквально. Конечно, эти волны не совсем похожи на электромагнитные. Если хотите более точную аналогию, то волны в модели Френкеля — Конторовой описывают мезоны, а дислокации — протоны.

Читатель. А что такое мезон? Я слышал про π -мезон и μ -мезон. Вы их имеете в виду?

Автор. Во-первых, μ -мезон вовсе не мезон, а лептон. Он входит в одно семейство с электроном и нейтрино. Это имя он получил случайно, теперь его называют мюоном. Он почти ничем не отличается от электрона, только в 207 раз тяжелее. А вот π -мезон действительно относится к семейству мезонов. В каком-то смысле его можно считать аналогом фотона. Если электромагнитное поле необходимо для того, чтобы связать электроны и протоны в атомы, то поле π -мезонов необходимо, чтобы протоны и нейтроны связывались в атомные ядра. Правда, дело здесь обстоит гораздо сложнее...

Читатель. Нет-нет! Довольно сложностей! Скажите только, почему Ваши «мезонные волны» должны обязательно диспергировать? И потом, все-таки непонятно, какое отношение имеют эти волны к мезонам. Мезоны ведь частицы?

Автор. Ответу сначала на второй вопрос. Правда, точный ответ на него возможен лишь в квантовой теории. Мезон — это квант мезонного поля, точно так же, как фотон — квант электромагнитного поля. Если это непонятно, то можете себе представлять фотон как группу электромагнитных волн, а мезон — как группу «мезонных волн». Тогда Вы сразу получаете ответ на первый вопрос: дисперсия нужна для того, чтобы групповая скорость отличалась от фазовой. Фотон — это частица с нулевой массой, скорость такой частицы всегда равна скорости света. Мезон — частица с конечной массой (π -мезон примерно в 270 раз тяжелее электрона), и закон дисперсии должен быть таким, что группа волн движется как частица с такой массой. Учтите только, что этот ответ не-

полный, а по существу даже и неправильный. Правильный ответ можно дать только в квантовой теории.

Для понимания соотношения между полем и солитоном, напротив, не требуется никакой квантовой теории, и я постараюсь больше не вспоминать ни о каких квантах. Давайте действительно вернемся к солитонам. Я покажу, как основные свойства солитона Френкеля можно получить на точном языке математики. При этом Вы увидите, что все опять сводится к движению маятников, точнее, к асимптотическим движениям маятников (вспомните рис. 4.15). Надеюсь, Вы еще не забыли, что это такое?

Читатель. Признаться, я не очень внимательно прочел главу о маятнике. Она мне показалась слишком длинной. К тому же я не понимаю, как Вы хотите связать дислокацию с маятником. Понятно, что каждую частицу в ямке можно считать маятником. Однако когда дислокация стоит на месте, грузики неподвижны, речь, по-моему, может идти не о колебаниях, а о равновесии маятников, связанных пружинами... Впрочем, если дислокация движется, то грузики действительно ведут себя как маятники, делающие одно полное колебание. Только почему оно асимптотическое?

Автор. Я мог бы ответить на этот вопрос, но давайте лучше сначала уточним модель и напишем некоторые формулы.

Признаюсь, что я пока немного обманывал Вас, выдавая за модель Френкеля — Конторовой более наглядную, но и более сложную систему. Теперь займемся настоящей моделью Френкеля — Конторовой.

Дислокации и маятники

В настоящей модели ФК атомы, естественно, движутся по прямой (ось x) и все силы, действующие на них, направлены также по оси x . Действие соседних атомов верхнего слоя представим, как всегда, пружинами, а действие атомов нижнего слоя («подкладки») описывается периодической синусоидальной силой

$$f(x) = -f_0 \sin(2\pi x/a).$$

Как и в предыдущей главе, обозначим отклонение n -го атома от положения равновесия функцией $y_n(t) = x_n(t) - na$, где $x_n(t)$ — координата n -го атома. Со стороны «подкладки» на n -й атом действует сила

$$f(x_n) = -f_0 \sin\left[\frac{2\pi}{a}(y_n + na)\right] = -f_0 \sin\left(2\pi \frac{y_n}{a}\right).$$

Пружины действуют на n -й атом с силой, равной

$$k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}).$$

Уравнение движения n -го атома поэтому принимает вид

$$m\ddot{y}_n = -f_0 \sin(2\pi y_n/a) + k(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}). \quad (6.1)$$

Если $f_0 = 0$, то мы получаем уравнение (5.8), уже изученное раньше.

Итак, мы получили уравнение (6.1), соответствующее модели Френкеля – Конторовой. Сейчас мы найдем решение этого уравнения, описывающее движущуюся дислокацию. Читателя, разобравшегося в предыдущей главе, уже не смущает, что это не одно уравнение, а бесконечная система уравнений. Мы знаем, что движущаяся дислокация подобна волне, бегущей по цепочке маятников, в которой каждый маятник с некоторым запаздыванием точно повторяет все движения предыдущего. Время этого запаздывания Δt определяется скоростью перемещения волны $v = a/\Delta t$. Таким образом (вспомните рис. 5.7),

$$y_{n+1}(t) = y_n(t - \Delta t), \quad y_{n-1}(t) = y_n(t + \Delta t).$$

Смещения $y_n(t + \Delta t)$ можно найти, считая движение атома от момента $t - \Delta t$ до момента $t + \Delta t$ равномерно ускоренным. Тогда, как мы уже писали,

$$y_n(t \pm \Delta t) = y_n(t) \pm \dot{y}_n(t)\Delta t + \ddot{y}_n \frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Подставляя это в уравнение (6.1), получаем замечательно простое уравнение

$$[m - k(\Delta t)^2] \ddot{y}_n = -f_0 \sin(2\pi y_n/a). \quad (6.2)$$

Присмотримся к этому уравнению повнимательнее. Если отвлечься от обозначений, то видно, что оно почти совпадает с уравнением маятника, о котором так много говорилось в гл. 4. Когда периодической силы не было, т. е. $f_0 = 0$, мы должны были положить $m = k(\Delta t)^2$, откуда и определили скорость распространения звука в свободной цепочке:

$$v_0 = \frac{a}{(\Delta t)_0} = a \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Теперь квадратная скобка не равна нулю. Перепишем ее в виде

$$[m - k(\Delta t)^2] = m \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2} \right) = -m_*. \quad (6.3)$$

Теперь ясно, что при медленном движении дислокации, когда $v < v_0$, квадратная скобка отрицательна, а определенная нами эффективная масса m_* , зависящая от скорости v , положительна.

Легко свести уравнение (6.2) к уравнению маятника (4.1). Вспомним, что $\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi$, и положим $2\pi(y_n/a) = \pi + \varphi_n$, т. е. будем измерять отклонение атома от положения равновесия «углом» φ_n . Если атом остался на месте, то $y_n = 0$ и $\varphi_n = -\pi$. Если он смещается вправо, то угол φ_n возрастает и при $y_n = a$ принимает значение $+\pi$. Таким образом, переходу атома со дна одной «ямки» на дно другой соответствует асимптотическое движение «маятника». При таком изменении обозначений уравнение движения (6.2) можно записать в виде (проверьте это!)

$$\ddot{\varphi}_n = -\omega^2 \sin \varphi_n, \quad \omega^2 = (2\pi f_0/m_*)a. \quad (6.4)$$

Движение «маятника» по сепаратрисе, когда $\varphi_n(t)$ изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, мы уже определили раньше (вспомним формулу (4.10) и рис. 4.15). Напишем эту формулу еще раз:

$$\varphi_n(t) = \pi - 4 \operatorname{arctg} [e^{-\omega(t-t_n)}].$$

Так как маятники качаются с запаздыванием, мы выбрали свое начало отсчета времени t_n для каждого из маятников. Поскольку смещение атомов от ячейки к ячейке распространяется со скоростью $v = a/\Delta t$, надо взять $t_n = n \Delta t$. Тогда $\varphi_1(t) = \varphi_0(t - \Delta t)$, и вообще $\varphi_n(t) = \varphi_0(t - n \Delta t)$.

Выразим теперь t_n через скорость дислокации, т. е. $t_n = na \cdot (\Delta t/a) = na/v$, и заменим na на x . Будем писать соответственно $\varphi_n(t) = \varphi(t, x)$, где $x = na$. Тогда функцию $\varphi(t, x)$, описывающую движущуюся дислокацию, можно записать в виде

$$\varphi(t, x) = \pi - 4 \operatorname{arctg} [e^{-\omega(t-x/v)}].$$

Эта функция определяет форму дислокации в любой момент времени:

$$y_n(t) = a/2 + (a/2\pi) \varphi(t, na).$$

Удобно записать показатель экспоненты в форме $(x - vt)/l_v$, где $l_v = v/\omega$. Вспоминая определения «частоты» ω и «массы» m_* (см. формулы (6.4) и (6.3)), после простых преобразований получаем

$$l_v = \frac{v}{\omega} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2}}, \quad l_0 = a \sqrt{\frac{mv_0^2}{2\pi f_0 a}}.$$

В этом выражении для величины l_0 под корнем написана безразмерная величина, равная отношению неких двух энергий. Выясним смысл этих энергий. Вспоминая, что $v_0 = a\sqrt{k/m}$, представим mv_0^2 как ka^2 . Эта величина пропорциональна энергии, необходимой для растяжения пружины на величину порядка a . В знаменателе стоит произведение силы f_0 на расстояние a , что, очевидно, пропорционально работе, которую надо затратить на преодоление барьера, отделяющего одну ямку от другой. Таким образом, l_0 увеличивается при увеличении жесткости пружин и уменьшении силы со стороны «подкладки», привязывающей атомы к определенным местам. В дальнейшем будем считать, что упругая энергия ka^2 значительно превосходит f_0a , и, таким образом, величина $l_0 \gg a$.

Теперь посмотрим на окончательное выражение для функции $\varphi(t, x)$, описывающей дислокацию

$$\varphi(t, x) = \pi - 4 \operatorname{arctg} [e^{-(x - vt)/l_v}]. \quad (6.5)$$

Эта функция представлена на рис. 6.3, а. На рис. 6.3, б изображена кривая зависимости φ от x в момент $t = 0$.

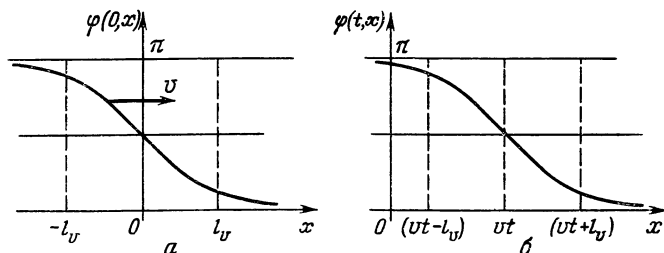


Рис. 6.3

Вдали от центра дислокации, расположенного в точке $x = 0$, атомы расположены вблизи положений равновесия, т. е. $\varphi \approx \pi$ или $\varphi \approx -\pi$. Атомы находятся далеко от положений равновесия лишь на расстояниях $\lesssim l_v$ от центра. Мы можем поэтому называть l_v *полушириной дислокации* или просто ее размером.

Если скорость дислокации равна нулю, то ее размер $l_v = l_0$ зависит лишь от характеристик решетки. Размер равномерно движущейся дислокации l_v с увеличением скорости уменьшается, причем это уменьшение определяется формулой

$$l_v = l_0 \sqrt{1 - v^2/v_0^2}, \quad (6.6)$$

напоминающей преобразование длины при переходе в движущуюся систему координат в специальной теории относительности, только вместо скорости света c в ней стоит скорость звука v_0 .

Читатель. Не означает ли это, что дислокации нужно описывать с помощью теории относительности?

Автор. Да, аналогию с теорией относительности можно провести достаточно далеко. Можно показать, что энергия E и импульс p движущейся дислокации также выражаются формулами «теории относительности»

$$E = \frac{m_0 v_0^2}{\sqrt{1 - v^2/v_0^2}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/v_0^2}}, \quad m_0 = \frac{2}{\pi^2} \frac{a}{l_0} m. \quad (6.7)$$

Читатель. Почему же Вы все время подчеркиваете, что это аналогия? Из-за того, что вместо скорости света стоит скорость звука?

Автор. Не только поэтому. Все это больше похоже не на теорию относительности Эйнштейна, а на предшествовавшие ей теории Лоренца, Лармора и Пуанкаре, основанные на понятии об эфире. Особенно это напоминает идеи Дж. Лармора, считавшего частицы вещества чем-то вроде дислокаций в эфире. Правда, у него все это выглядит гораздо сложнее, но суть дела именно такая.

Во что превратились звуковые волны

Итак, мы уже поняли, что солитоны перемещаются со скоростями, меньшими v_0 . А как же с обычными звуковыми волнами — могут ли они распространяться в среде, смоделированной Френкелем и Конторовой?

Возвратимся к уравнению (6.2). Даже для волн очень малой амплитуды его правую часть отбросить нельзя. Можно только приближенно заменить ее на $-2\pi f_0(y_n/a)$. Тогда сразу видно, что $y_n(t)$ будет изменяться по синусоидальному закону, если величина «эффективной массы» m_* отрицательна. При положительной эффективной массе никаких колебаний $y_n(t)$ не получится (вспомните гл. 4!). Предположим поэтому, что $m_* < 0$. Тогда из формулы (6.3) следует, что скорость распространения волны v должна быть больше v_0 , т. е. больше чем в свободной цепочке атомов! Не противоречит ли это только что сделанным вычислениям? Конечно, нет. Скорость v — это фазовая скорость волны, и мы сейчас увидим, что скорость группы волн оказывается всегда меньше v_0 .

Итак, подставим в формулу (6.2) соотношение (6.3) и заменим $\sin[2\pi(y_n/a)]$ на $2\pi(y_n/a)$. Для $y_n(t)$ получаем тогда

уравнение малых (линейных) колебаний

$$\ddot{y}_n = -\omega^2 y_n,$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - v_0^2/v^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{2\pi f_0}{ma}, \quad v > v_0. \quad (6.8)$$

Решения этого уравнения, например

$$y_n(t) = y_n(t_n) \cos [\omega(t - t_n)],$$

описывают, как и раньше, бегущие волны. Вспоминая рассуждения, приведенные при выводе формулы (6.5), представим волну смещения атомов в виде

$$y(t, x) = y_0 \cos [\omega(t - x/v)].$$

Зависимость круговой частоты волны ω от фазовой скорости определяется формулой (6.8). Из условия связи длины волны с частотой и скоростью, т. е. из обычного соотношения $\lambda = v/\nu = 2\pi v/\omega$, легко находим зависимость фазовой скорости от длины волны:

$$v = v_0 \sqrt{1 + \lambda^2/\lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = 2\pi v_0/\omega_0. \quad (6.9)$$

Упражнение. получите формулы (6.8), (6.9), воспользовавшись формулами (6.2), (6.3). Найдите групповую скорость u из формулы (5.23).

$$\text{О т в е т: } u = v_0^2/v = v_0/\sqrt{1 + (\lambda/\lambda_0)^2}.$$

Зависимость скорости v от длины волны λ изображается хорошо изученной нами кривой — гиперболой. Обозначив $v/v_0 = X$ и $\lambda/\lambda_0 = Y$, можно записать уравнение (6.9) в более знакомом и приятном виде как $Y^2 - X^2 = 1$. Как мы уже убедились в гл. 4, точки этой кривой можно находить с помощью циркуля и линейки. Это построение выполнено на рис. 6.4, где введены обозначения

$$X_1 = \lambda_1/\lambda_0, \quad Y_1 = v_1/v_0, \\ 1/Y_1 = u_1/v_0,$$

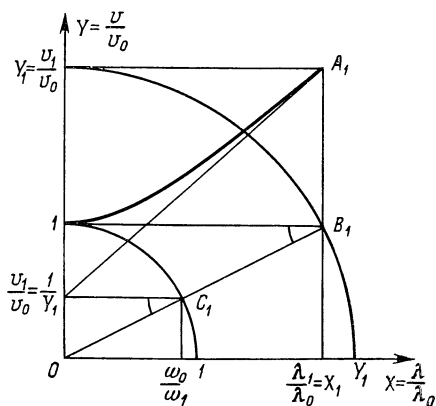


Рис. 6.4

λ_1 — интересующее нас значение длины волны,

v_1 — соответствующее значение фазовой скорости, определяемое формулой (6.9), а $u_1 = v_0^2/v_1$ — значение групповой скорости.

Упражнение: выполните построение рис. 6.4. Покажите, что координаты точки A_1 подчиняются соотношению (6.9), координаты точки C_1 равны ω_0/ω_1 и $u_1/v_0 = v_0/v_1$, где ω_1 — значение ω , соответствующее заданному значению $\lambda = \lambda_1$.

Полученный нами закон дисперсии очень часто встречается в самых разных физических явлениях, и стоит потратить некоторое время, чтобы как следует понять его. Особенно полезно представить его с помощью дисперсионной формулы

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \lambda_0^2/\lambda^2), \quad (6.10)$$

которая легко получается заменой в формуле (6.9) отношения v/v_0 на $(\lambda\omega/\lambda_0\omega_0)$.

Отсюда сразу видно замечательное свойство этого закона дисперсии — частота распространяющихся по цепочке волн всегда выше частоты ω_0 , с которой колебался бы каждый атом цепочки вблизи своего положения равновесия, если бы он находился только под действием «подкладки». Физически очевидно, что частота ω_0 достигается при очень большой длине волны, когда соседние атомы смещаются без изменения относительно расстояния (как твердое тело). При этом пружины настолько слабо деформируются, что их как бы и нет.

Другое свойство закона дисперсии (6.9) роднит его с гравитационными волнами на глубокой воде. Мы видим, что фазовая скорость $v(\lambda)$ увеличивается с увеличением длины волны. Правда, эта зависимость несколько иная — скорость очень длинных волн на воде пропорциональна $\sqrt{\lambda}$, а скорость волн смещения пропорциональна λ (при $\lambda \gg \lambda_0$). Тем не менее можно считать, что природа происхождения дисперсии в обоих случаях качественно сходна. Во всяком случае, найденная нами дисперсия волн смещения в атомной цепочке не связана с ее дискретной структурой, которая может проявиться лишь при очень малых длинах волн, порядка постоянной решетки a .

При выводе закона дисперсии мы, в сущности, с самого начала пренебрегали дискретной структурой, предполагая, что $a \ll \lambda$ и $a \ll \lambda_0$. Нетрудно проверить, что $\lambda_0 = 2\pi l_0$ (проверьте!). Поэтому при $a \ll \lambda_0$ будет также выполнено условие $a \ll l_0$, т. е. размер дислокации l_0 должен быть большим по сравнению с межатомным расстоянием. Отсюда ясно, что дефект по Френкелю, размер которого примерно равен a , нельзя описать с помощью изложенной здесь теории. Если, однако, не гнаться за точностью, то можно считать дефект

по Френкелю просто дислокацией малого размера l_0 , сравнимого с a . Описание при этом будет качественно правильным.

Если это не вполне понятно, нужно вспомнить начало предыдущей главы, где описаны колебания системы из двух и трех грузиков, соединенных пружинками. Эти колебания соответствуют стоячим волнам сплошной резинки (рис. 5.4 и 5.5), но только нельзя рассматривать волны с длиной, меньшей $2a$. Более точное описание дефекта по Френкелю можно найти с помощью исходного уравнения (6.1). Если пружины очень мягкие, т. е. если $ka \ll f_0$, то существует равновесное состояние, в котором один из атомов смещен примерно на a , а все остальные смещены мало (попробуйте это проверить самостоятельно!). Это и есть дефект по Френкелю.

Раз уж мы вспомнили переход от цепочки атомов к сплошной среде, стоит написать, во что превратится при таком переходе основное уравнение (6.1). Как и при выводе уравнения Д'Аламбера, можно считать, что второй член в правой части перейдет в $ka^2 y''$. Переходя от $y(t, x)$ к $\varphi(t, x)$ (вспомните вывод уравнений (6.4), (6.5)), найдем в результате, что

$$\ddot{\varphi} = v_0^2 \varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi. \quad (6.11)$$

Если $\omega_0 = 0$, то из этого уравнения получается уравнение Д'Аламбера.

К уравнению (6.11) приклеилось странное название — *уравнение «синус — Гордона»*. Происхождение этого жаргонного наименования связано с тем, что при значениях φ , мало отличающихся от π , т. е. $\varphi = \pi + \psi$, где $|\psi| \ll \pi$, оно переходит в уравнение

$$\ddot{\psi} = v_0^2 \psi'' - \omega_0^2 \psi. \quad (6.12)$$

Это, а если говорить совсем точно, несколько более общее уравнение было предложено в 1926 г. Э. Шредингером, О. Клейном, В. Гордоном и В. А. Фоком, и обычно физики для краткости называют его *уравнением Клейна — Гордона*. Подобное стремление к укорочению названий породило и сочетание «синус — Гордона».

На самом деле уравнение (6.12) было известно уже в прошлом веке и называлось уравнением струны в упругой среде (действие упругой среды на каждый кусочек струны описывается членом $-\omega_0^2 \varphi$ в правой части уравнения). Уравнение (6.11) также встречалось математикам в конце прошлого века. Оно появилось в связи с исследованиями по геометрии Лобачевского*) и было известно лишь геометрам. Достаточно полное изучение решений уравнения (6.11) было выполнено лишь

*) Любому решению этого уравнения соответствует некоторая поверхность, на которой выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Такие реализации геометрии Лобачевского сыграли основную роль в признании его идей.

в 1936 г. немецким математиком Р. Штойервальдом. Он нашел решения, соответствующие (на нашем с вами языке) одному солитону, двум солитонам и бризеру. Эти результаты до самого последнего времени были известны лишь немногим специалистам по геометрии и не оказали никакого влияния на развитие науки о солитонах. Для физики уравнение «синус – Гордона» было открыто Френкелем и Конторовой, и они же нашли его солитонное решение. Связать эти открытия с их именами естественно и справедливо, хотя наиболее удивительные свойства модели ФК были обнаружены позднее другими исследователями. Как сказал Больцман: «Еще почти никогда... не бывало, чтобы та самая голова, которая впервые натолкнулась на ту или иную новую идею, до конца исчерпала бы ее».

Заканчивая этот раздел, стоит все же заметить, что Френкель без особого труда мог бы найти как двух-солитонное решение, так и бризер, если бы только физика подсказала такую возможность. Сами решения выглядят довольно просто. Например «легкий» бризер, в котором смещения атомов малы, найти совсем не трудно. Если $\varphi(t, x)$ отклоняется от равновесного значения $\varphi = \pi$ не больше, чем на малую величину $|\varphi - \pi| \ll \pi$, то

$$\varphi(t, x) \approx \pi - \varphi_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\operatorname{ch}(\varphi_0 x / 4l_0)}, \quad |\varphi_0| \ll \pi.$$

Это действительно просто стоячая волна с малой амплитудой.

Как увидеть дислокации?

Что, наконец, представляется нам затвердевшим и плотным, то состоять из начал крючковых должно несомненно, сцепленных между собой наподобие веток сплетенных

Тит Лукреций Кар

Всякий знает, что металлы сами по себе довольно «мягкие» или, лучше сказать, пластичные. Речь идет о «совершенном» металле, который имеет простую, не искаженную примесями и дефектами кристаллическую структуру. Кристаллическая решетка большинства металлов построена из одинаковых «кубиков». Вдоль плоскостей этих «кубиков» кристалл легко можно сдвинуть. Если вы сложите стопкой монеты, то небольшим боковым усилием легко сдвинете ее. Точно так же легко сдвигается по некоторым плоскостям идеальный кристалл. Такой сдвиг происходит совсем легко, если приложенное усилие создает дислокации, которые бегут одна за другой. Вам не нужно сдвигать сразу много атомов, а достаточно образовать дислокацию, для чего требует-

ся небольшое усилие. По этой причине чистые, правильные кристаллы многих металлов очень мягкие. Однако бывает, что куски одной и той же на вид проволоки гнутся совсем не одинаково. Эти куски одинаковы лишь внешне, а внутренняя структура у них совсем разная. Те, которые гнутся плохо, подверглись обработке: вероятно, их уже сгибали. Возможно, вы замечали, что проволоку часто легче согнуть, чем разогнуть. А причина тому — дислокации. При сгибании в кристалле неизбежно образуется большое число дислокаций. Расстояния между атомами при этом практически не изменяются, но кристалл в одних направлениях растягивается, а в других — сжимается. Обратимся к рис. 6.5: линии изображают, конечно, довольно схематично, правильные ряды атомов кристалла, а их обрывы — это дислокации.

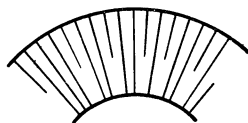


Рис. 6.5

Если при сгибании образуется очень много дислокаций, они начинают «мешать» друг другу. Точнее говоря, кристалл становится настолько несовершенным, что дислокации по нему уже не смогут распространяться свободно. Если вспомнить модель, с которой мы начинали, то можно сказать, что правильно чередующиеся ямки становятся довольно нерегулярными. Образуются широкие холмы и овраги, за которые дислокации «зацепляются». Чтобы разогнуть кристалл, вам придется перемещать уже огромные коллективы атомов, а не «передислоцировать» их небольшие группы. Вот и выходит, что разогнуть — совсем не то, что согнуть! Между прочим, то же самое — образование большого числа перепутанных дислокаций и других дефектов — происходит при ковке металлов. Можно сильно уменьшить число дислокаций, которые образовались при сгибании и разгибании проволоки, если «отжечь» проволоку. После отжига она снова станет совсем мягкой. Вы можете удивить своих менее просвещенных друзей простым фокусом — «я пятаки могу ломать». Прокалите достаточно толстую проволоку в огне газовой горелки. Остыв, она останется мягкой, и из нее легко можно сделать кольцо на палец или браслет на запястье, в зависимости от толщины проволоки. Предложите затем доверчивому зрителю разогнуть это кольцо!..

Почему кольцо стало таким неподатливым? Дело в том, что при сильном нагревании дислокации «распутываются», атомы, в основном, становятся на свои места и проволока смягчается. После сгибания структура проволоки становится, как сказал Лукреций Кар, «крючковой»...

Здесь могут возникнуть два вопроса. Во-первых, почему должны обязательно образовываться дислокации, а не просто дефекты по Френкелю? Во-вторых, можно ли увидеть сами дислокации, а не делать умозаключения об их существовании?

Попробуем сначала разобраться с первым вопросом. В реальных кристаллах на создание дислокации нужно затратить меньше энергии, чем на образование одного дефекта по Френкелю. Энергия покоящегося дефекта примерно равна ka^2 , а энергия покоящейся дислокации равна

$$E_0 = m_0 v_0^2 = m v_0^2 \frac{2}{\pi^2} \frac{a}{l_0} = ka^2 \frac{2}{\pi^2} \frac{a}{l_0}.$$

Не приводя вывода этой формулы, напомним только, что m_0 — это эффективная масса покоящейся дислокации. Энергию движущейся дислокации можно найти с помощью (6.7).

Теперь ясно, что если размер дислокации l_0 много больше постоянной решетки a , то для создания одиночного дефекта Френкеля требуется примерно во столько же раз большее количество энергии, поскольку $E_0/ka^2 \sim a/l_0$. Это дает ответ на первый вопрос.

Ответ на второй вопрос дали замечательные эксперименты, выполненные в Кавендишской и в других лабораториях лет тридцать назад. С помощью электронного микроскопа удалось буквально увидеть картину, изображенную на рис. 6.5. Больше того, удалось даже снять кинофильм с большим числом движущихся дислокаций, которые, по выражению первых его зрителей, «сустились как мыши». Возможно, что внимательное изучение подобных фильмов позволило бы увидеть столкновения дислокаций и даже бризеры.

Замечательную модель кристалла, позволяющую увидеть дислокации невооруженным глазом, придумали Л. Брэгг и Дж. Най. В этой модели двумерный кристалл делается из мыльных пузырьков. Лучше всего прочесть саму работу Брэгга и Ная и посмотреть полученные ими фотографии дислокаций. Работа написана очень просто и занимательно, перевод ее на русский язык помещен в Приложении ко второму тому «Фейнмановских лекций по физике» (М.: Мир, 1966). Модель Брэгга — Ная описана также в «Опытах в домашней лаборатории». На рис. 77 этой книги можно ясно увидеть три френкелевских дислокации. Одна на средней фотографии и две — на нижней. Чтобы их разглядеть, надо рассматривать плоскость страницы под малым углом, при этом должны быть ясно видны параллельные ряды «атомов». В месте расположения дислокаций эти линии «перебиваются», и ясно видна френкелевская структура дислокаций.

Настольные солитоны

Простую реализацию модели Френкеля — Контровой можно изготовить из нашего скрепочного устройства (вспомните рис. 5.2). Прикрепите к концам скрепок грузики из пластилина — и прибор готов! Если резинка достаточно близка к идеальной, то наше устройство есть не что иное, как набор маятников в поле силы тяжести, упруго связанных друг с другом благодаря закручиванию резинки. После всех наших занятий с маятниками совсем не трудно понять, что будет происходить со скрепками, и написать уравнения, описывающие их движения. Читатель, вероятно, уже догадался, что эти уравнения совершенно подобны уравнениям (6.1). Чтобы их написать, удобно идеализировать скрепки, заменив их грузиками с массой m на невесомых твердых стерженьках длины l . Эта упрощенная модель изображена на рис. 6.6. Закручивание резинки, на которой подвешены маятники, создает момент упругой силы, действующей на маятник. Этот момент зависит от углов закручивания соседних маятников. Очевидно, что момент, действующий на n -й маятник, можно записать в виде $K(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - K(\varphi_n - \varphi_{n-1})$. Закончить это небольшое исследование предоставим читателю.

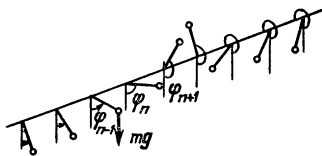


Рис. 6.6

Упражнение: получите уравнение типа уравнения (6.1), описывающее движение маятников. Найдите максимальную скорость (скорость «звука») и длину солитона.

Ответ: $v_0 = a\sqrt{K/ml^2}$, $l_0 = a\sqrt{K/mgl}$.

Конечно, на таком примитивном устройстве можно увидеть немного. В лучшем случае удастся изучить движение одного солитона и дисперсию волн малой амплитуды. На рис. 6.6 схематически изображены отклонения маятников, соответствующие одному солитону, т. е. угол закручивания изменяется от 0 до 2π . Из-за большого затухания, вызванного трением в резинке, солитон довольно быстро останавливается.

Более совершенный «генератор солитонов», основанный на том же принципе, можно сделать из гвоздей и пружин. Основная идея должна быть понятна из рис. 6.7. Маятники насаживаются на хорошо натянутую фортепианную струну диаметром ~ 1 мм. Необходимо, чтобы трение при вращении держателя D на струне было как можно меньше. В приборе, который был построен в 1969 г. А. Скоттом (примерные

параметры его и приведены на рис. 6.7), длина солитона была ~ 5 см, а $v_0 \approx 50$ см/с. На своем приборе А. Скотт наблюдал столкновения солитона с солитоном и антисолитоном, зависимость размера солитона от скорости, дисперсию волн и другие закономерности и явления.

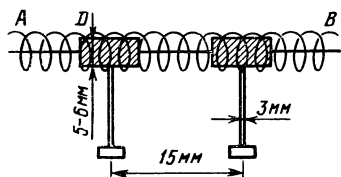


Рис. 6.7

мы знаем, она тогда никого не интересовала... Общая идея солитона родилась в наше время, и солитон — дитя середины XX в. Нам пора вернуться в него, но сначала надо сказать еще несколько слов о «ручном» солитоне и о некоторых других солитонах, похожих на солитоны Френкеля.

Другие близкие родственники дислокаций по математической линии

Покоящийся «ручной» солитон, или солитон Эйлера, тоже описывается, как уже говорилось в гл. 3, уравнением маятника. Только роль времени играет длина дуги. Показать это совсем не сложно, если взять дискретную модель проволоки, сделанную из твердых стерженьков, соединенных пружинными шарнирами (вспомните, как устроены бельевые прищепки!). Рассмотрим несколько секций этой модели проволоки, изображенных на рис. 6.8.

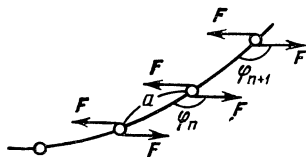


Рис. 6.8

Проволока растягивается силой F . Применяя третий закон Ньютона к каждому стерженьку длины a , легко понять, что на него действует пара сил F , момент которой равен $Fa \sin \varphi_n$. Пружинные шарниры стремятся выпрямить «проволочку». Полный закручивающий

момент, действующий на n -й стерженец, можно представить в виде $K(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1})$. Равновесие устанавливается, если этот момент равен нулю. Переходя, как обычно, к пределу непрерывной проволоки, т. е. считая длину стерженька малой, получим уравнение маятника

$$\varphi'' = -\frac{1}{l_0^2} \sin \varphi(s), \quad l_0^2 = \frac{Ka}{F}.$$

Здесь, как всегда, функция $\varphi(s)$ получена переходом $\varphi_n \rightarrow \varphi(na) \rightarrow \varphi(s)$, штрихи обозначают дифференцирование по длине дуги s . Величина l_0 имеет размерность длины, так как $[K] = [F] \cdot [L]$. Как мы сейчас увидим, l_0 — это размер ручного солитона. Предполагается, конечно, что при уменьшении a жесткость пружин возрастает так, чтобы величина Ka оставалась конечной.

Форма солитона описывается хорошо знакомым выражением

$$\varphi(s) = \pi - 4 \arctg(e^{-s/l_0}).$$

На первый взгляд кажется, что нарисовать эту кривую не так-то просто. Действительно, здесь s — длина дуги, а $\varphi(s)$ — угол наклона касательной к оси x , так что совсем не ясно, как изобразить реальную кривую $y(x)$, а не график зависимости φ от s . Оказывается, однако, что можно довольно просто построить кривую $y(x)$ по точкам, пользуясь лишь циркулем и линейкой. Это построение изображено на рис. 6.9. Основано оно на том, что точка кривой Эйлера,

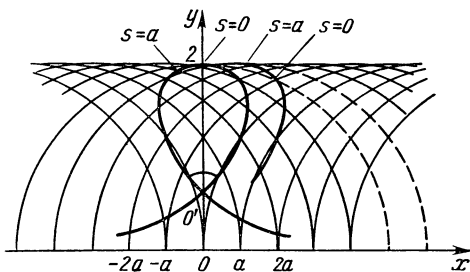


Рис. 6.9

имеющая на ней «координату» s , лежит на окружности в плоскости (x, y) с радиусом $2l_0$ и центром на оси x с координатой s . Математически это можно записать следующим образом:

$$[x(s) - s]^2 + [y(s)]^2 = 4l_0^2.$$

Если найдена, скажем, точка A_2 , лежащая на окружности с радиусом l_0 и центром в точке $-2a$, то для отыскания точки A_3 построим окружность с центром в точке $-3a$ (a — малая длина) и найдем точку пересечения с ней малой окружности радиуса a с центром в точке A_2 , которая и оказывается точкой A_3 . Точно так же строятся остальные точки A_4, A_5, \dots Чем меньше $\Delta s = a$, тем ближе будет построенная по точкам ломаная кривая к гладкой кривой Эйлера.

Если построение выполнено достаточно точно, угол самопересечения кривой будет равен примерно 110° . На рис. 6.9 мы взяли $l_0 = 1$. От l_0 зависит не форма, а лишь общий размер кривой, так как все они подобны. Солитон с размером $l_0 > 1$ получается увеличением всех размеров нарисованного солитона в l_0 раз (преобразование подобия, или «фотоувеличение»). Это замечательное свойство ручного солитона легко увидеть на опыте. Если же угол сильно отклоняется от 110° или заметно меняется при уменьшении размера петли, когда вы увеличиваете силу натяжения F , ваша проволочка не годится для наблюдения солитона, надо подыскать другую.

Если вы хорошо разобрались с выводом формул (3.9) и (3.10) для асимптотического движения маятника, то вам нетрудно будет понять и происхождение рис. 6.9. Представьте себе только, что φ — угол отклонения маятника, а s — время. Тогда рассуждения, которые были приведены в гл. 3, можно просто повторить, заменив t на s и ω_0 на $1/l_0$.

Попробуем теперь разобраться, почему ручной солитон может двигаться. В опытах он обычно останавливается примерно на середине проволочки. Дело в том, что проволочка, во-первых, далеко не идеальная, а, во-вторых, слишком короткая. Неидеальность означает, что в ней всегда есть остаточные деформации, которые мешают солитону двигаться. Но даже если эти деформации очень малы, солитон отталкивается от краев и останавливается посередине. Само это доказывает, что он может двигаться, иначе бы он застревал где попало. На рис. 6.9 изображен кусок солитона, сдвинувшегося на расстояние a . Легко увидеть, что каждая точка проволоки при движении солитона (сама проволока закреплена неподвижно, бежит только «волна»!) движется по нарисованным окружностям. В частности, точка с «координатой» $s = 0$ движется по окружности с центром в точке O . Это движение, однако, не равномерно, оно замедляется по мере приближения точки к оси Ox . Вы видите, что в движении ручного солитона проявляется замечательное сходство с волной на глубокой воде, в которой частички жидкости также движутся по окружностям!

Мы, однако, так и не ответили на вопрос, почему все-таки солитон будет двигаться, а не стоять на середине проволочки. Представьте себе, что проволочка бесконечна. Тогда все положения солитона на ней совершенно эквивалентны. Отсюда и следует, что он может медленно перемещаться, не меняя форму. В нашем же случае, когда проволочка имеет конечный размер, хорошо как раз то, что ручной солитон может находиться в покое и его можно хорошенько рассмотреть.

Можно также увидеть, что два солитона отталкиваются друг от друга, хотя процесс столкновения солитонов увидеть, скорее всего, невозможно. Зато на ручной модели солитона замечательно ясно видна его «неуничтожимость», а также истинная природа сохранения «заряда» солитонов. На бесконечной проволочке нельзя создать солитон (если проволочка остается в одной плоскости) и нельзя его уничтожить. Точно так же нельзя уничтожить, оставляя проволочку в одной плоскости, два и большее число солитонов (рис. 6.10, а: «протаскивание» проволочки под ней самой не требует вывода «бесконечно тонкой» проволочки из плоскости). Наоборот, пару из солитона и антисолитона (рис. 6.10, б) легко сделать и уничтожить,

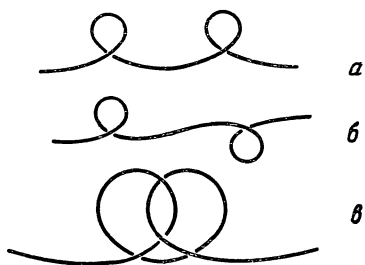


Рис. 6.10

оставляя проволочку в одной плоскости. Легче это проверить, взяв кусок шпагата, который не сопротивляется изгибу. Если попробовать таким же способом «развязать» узелки, изображенные на рис. 6.10, а, то получится двойной узелок (рис. 6.10, в), который никакими ухищрениями нельзя «развязать», не выводя проволочку из плоскости. Подобные и более сложные узлы образуются, например, когда запутывается длинная леска на спиннинге. Те, кто сталкивался с такой неприятностью, знают, что для распутывания лески ее ни в коем случае нельзя тянуть, а надо терпеливо и аккуратно крутить узелки в трехмерном пространстве.

Все это дает право назвать ручной солитон *топологическим*, а определенный нами «солитонный заряд» естественно назвать *топологическим зарядом*. Как известно*), топология изучает свойства фигур, сохраняющиеся при их непрерывных деформациях. С топологической точки зрения проволочка с узлами, изображенными на рис. 6.10, б, эквивалентна проволочке без узлов, а проволочка с узлами, показанными на рис. 6.10, а, не эквивалентна. Заряд солитонов, причина сохранения которого коренится в топологических свойствах солитонов, позволяет дать количественную характеристику

*) См., например, книгу: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — Библиотечка «Квант», вып. 21.

этому соотношению эквивалентности. То же самое можно сказать и о других солитонах, описываемых уравнением Френкеля — Конторовой. Внешне они выглядят по-разному, но их математическое устройство одинаково. Одинакова, следовательно, и их топологическая сущность, нужно только уметь их сравнивать. Например, установив соответствие между углом наклона касательной к ручному солитону и углом отклонения маятников при их солитонном движении (длине дуги s соответствует в этом случае расстояние по оси, на которой подвешены маятники), мы можем полностью отождествить оба солитона, по крайней мере, в состоянии покоя.

Магнитные солитоны

Солитоны, очень похожие на дислокации, можно найти в очень многих физических системах. О некоторых из них будет коротко рассказано в самом конце книги, а здесь стоит сказать несколько слов о магнитных солитонах. Они изучались сначала независимо от дислокаций, и их родство с дислокациями было замечено очень не скоро.

Речь идет о намагничивании ферромагнетиков, например железа. Они намагничиваются с большой легкостью из-за того, что в них могут образовываться солитоны. Понять это можно на очень простой модели. Представим себе, что на рис. 6.6 вместо маятников вращаются магнитики. Они находятся не в поле силы тяжести, а в некотором «кристаллическом» поле, которое устроено так, что энергия отдельно взятого магнетика минимальна, когда он находится в вертикальном положении (т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pm \pi$). Это поле аналогично полю окружающих атомов в случае дислокаций. Простейшая модель получится, если момент силы кристаллического поля, стремящегося выстроить магнитики, пропорционален $-\sin 2\varphi$. Направления вверх и вниз называются направлениями легчайшего намагничивания. Обычно они связаны с осями симметрии кристаллической решетки.

Если соседние магнитики никак не связаны, то наш кристалл намагничивается только во внешнем магнитном поле. Для того чтобы он сохранял намагниченность при выключении поля, нужны еще силы между соседними магнитиками, подобные тем, которые создаются в механических моделях пружинками или резинками. Действие этих сил могло бы обеспечить удержание магнитиков в одном направлении, скажем, в верхнем. Природу таких сил удалось понять только после создания квантовой механики. Она была выяснена в 1928 г. Я. И. Френкелем и одним из творцов современной

квантовой теории Вернером Гейзенбергом. Для понимания магнитного солитона разбираться в происхождении этих сил не нужно, достаточно знать, что в ферромагнетике они действуют наподобие пружин или резинок.

В результате магнетики проявляют сильно выраженный коллективизм. Скажем, если один из них находится между двумя другими, смотрящими вверх, то он тоже будет стремиться смотреть вверх. Коллективу магнетиков энергетически выгодно смотреть либо вверх, либо вниз.

Однако мы забыли еще об одном обстоятельстве. Такой коллектив будет создавать свое собственное магнитное поле, и, помимо энергии взаимодействия магнетиков друг с другом и с кристаллическим полем, нужно учесть еще энергию этого поля. Полная энергия, т. е. энергия нашего коллектива вместе с энергией его магнитного поля, будет минимальной, если коллектив разобьется на группы. В одних члены группы смотрят вниз, а в других — вверх. Эти группы называются доменами (от франц. *domaine* — область).

Границы между доменами, в которых индивидуальные магнетики постепенно меняют направление ориентации с верхнего на нижнее, называются доменными стенками. Они-то и являются *магнитными солитонами*, совершенно подобными дислокациям и механическим солитонам. Как и дислокации, доменные стенки могут свободно перемещаться по кристаллу, если, конечно, им не мешают несовершенства кристаллической решетки или другие доменные стенки. Ненамагниченный кристалл состоит из большого числа доменов, направления намагниченности которых противоположны. Если поместить кристалл в магнитное поле, то стенки приходят в движение. В результате размеры доменов, магнетики которых направлены вдоль поля, увеличатся, а размеры остальных соответственно уменьшатся. При выключении поля стенки двигаются назад, но если их движению что-то мешает, то возникнет «остаточная намагниченность». Это настолько похоже на описанный выше механизм пластической деформации, что термины «мягкое» и «жесткое» (магнитно) железо должны быть понятны сами собой.

Чтобы оценить число и размеры доменов в ненамагниченном мягком железе, надо знать величины магнитной энергии и энергии доменной стенки. Для оценок достаточно считать, что объемная плотность магнитной энергии полностью намагниченного однородного кристалла равна примерно $0,1 \text{ Дж/см}^3$, а поверхностная плотность энергии доменной стенки — примерно 10^{-7} Дж/см^2 . Полная энергия будет минимальной, когда магнитная энергия каждого домена и энергия

его стенок будут примерно равными. Если взять кубик объемом 1 см^3 , то легко видеть, что это осуществится, когда он разбит примерно на тысячу плоских доменов. Тогда энергия всех стенок и энергия магнитного поля равны примерно 10^{-4} Дж. Один домен распространяется на несколько десятков тысяч межатомных расстояний, а ширина доменной стенки в несколько сот раз больше размера атомов (т. е. порядка 10^{-5} см)*). Таким образом, расстояния между стенками достаточно велики и толщина их также заметно больше размеров дислокаций. Поэтому наблюдать доменные стенки несколько легче.

Идея наблюдения очень проста. Тонко измельченный порошок магнитного материала (частицы размера 10^{-4} — 10^{-5} см) насыпают на гладко отполированную поверхность кристалла. Если эта поверхность проходит через ось легчайшего намагничивания, то магнитное поле будет «вылезать» на поверхность только вблизи доменных стенок и порошок будет собираться в этих местах (рис. 6.11). (Таким же образом выглядят домены в тонкой магнитной пленке, например в магнитофонной ленте.) Такие опыты были выполнены в 1931 г. Ф. Биттером.

Наблюдения эти не были случайными. Идея о существовании доменов была высказана еще в 1907 г. французским физиком Пьером Вейссом (1865 — 1940). Причины дробления на домены были впервые выяснены Я. И. Френкелем и Я. Г. Дорфманом в 1930 г. Они же оценили размеры доменов. После наблюдения доменов американский физик

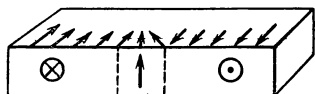


Рис. 6.11

Феликс Блох высказал мысль, что стенки должны быть довольно толстыми, и оценил их толщину. Очень общая и точная теория, позволяющая описывать всевозможные домены и стенки, была создана в 1935 г. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем.

Уравнения Ландау и Лифшица до сих пор используются для получения многочисленных новых солитонов. Ландау и Лифшиц не только нашли структуру описанной нами доменной стенки, но и описали движение стенки под действием

*) Из этих оценок следует, что при описании магнитных солитонов можно пренебречь атомной структурой, т. е. перейти к непрерывной модели. Другое интересное следствие состоит в том, что достаточно малые частицы размером меньше 10^{-4} см не могут содержать в себе стенок и составляют один домен.

слабого внешнего магнитного поля, т. е., по существу, медленное движение солитонов.

Солитонная природа стенок была, однако, выяснена гораздо позже, лет через пятнадцать-двадцать. Сначала никто просто не заметил, что движение стенки похоже на движение частицы. Вероятно, это было связано с тем, что уравнения Ландау — Лифшица, в общем, намного сложнее уравнения Френкеля — Конторовой. Не удивительно, что доменные стенки долго жили своей жизнью, независимой от жизни других солитонов.

Любопытно, что доменные стенки наблюдались еще сто лет назад, но не в реальных магнетиках, а в простой модели, состоящей из взаимодействующих маленьких магнетиков.

Идею о том, что магнетизм связан с молекулярными магнетиками, впервые высказал Френель в письме к Амперу, который и рассчитал поведение газа из таких магнетиков. В. Вебер первым догадался, что нужно привязать эти магнетики, сделав их маятниками. Идею Вебера подхватил и к 1890 г. весьма последовательно разработал в стройную теорию шотландский физик Джеймс Юинг (1855 — 1935).

Для нас наиболее интересно, что он делал опыты с моделью, состоящей из решетки большого числа очень маленьких стрелок компасов, взаимодействующих между собой. На этой плоской модели магнитного кристалла, подобной пузырьковой модели Брэгга и Ная, он наблюдал образование доменов и даже перемещение их границ.

Эксперименты и теория Юинга оказали большое влияние на Вейсса, но потом были забыты. Теория Юинга была вытеснена квантовой теорией и оставлена вполне заслуженно. Модель же Юинга интересна и сегодня.

Наша одномерная модель магнитного солитона — это просто разновидность, частный случай модели Юинга. Будем надеяться, что ее рано или поздно извлекут из забвения.

На этом придется покончить с солитонами Френкеля или доменными стенками. Это семейство столь многочисленно и так быстро растет, что трудно даже просто перечислить входящие в него солитоны. Доменные стенки, видимо, встречаются на всех уровнях организации Вселенной. Во всяком случае физики-теоретики изучают сегодня «стенки» от самого малого масштаба в теории элементарных частиц до самого огромного — в теории расширяющейся Вселенной.

ВТОРОЕ РОЖДЕНИЕ СОЛИТОНА

Другие по живому следу
Пройдут твой путь за пядью пядь

Б. Пастернак

Каждый век, приобретая новые идеи, приобретает и новые глаза.

Г. Гейне

Если наши потомки лет через сто попробуют, как это делали мы с вами, понять, что было главным в науке и технике сто лет назад, на одно из первых мест они, несомненно, поставят вычислительные машины. В наше время осуществились самые смелые мечты Бэббеджа. Сегодня Максвеллу или Кельвину не пришлось бы тратить силы на безрадостный вычислительный труд, эту работу за них проделали бы ЭВМ. Однако вычислительные машины уже сейчас делают гораздо больше того, о чем могли осмелиться мечтать даже эти великие люди, и в ближайшем будущем их возможности станут поистине фантастическими.

Бэббедж, Максвелл и Кельвин представляли себе, что вычислительная машина будет в основном применяться для выполнения операций с числами — составления таблиц функций, численного интегрирования, численного решения дифференциальных уравнений. Конечно, современные ЭВМ способны все это делать, и притом с такой скоростью и точностью, которая в прошлом веке не могла и пригрезиться. Но помимо этого ЭВМ сегодня могут производить операции с символами, или, как говорят, *аналитические расчеты*. Иными словами, их можно «научить» алгебре, тригонометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, так что они смогут решить все математические задачи, которые нам встретились в предыдущих главах. При этом они не только дадут нам аналитические решения, описывающие, скажем, форму солитона, но и построят графики, сделают кинофильм о движении солитонов и т. д. Это пока возможно лишь для достаточно простых моделей. В более сложных случаях машина будет действовать «по старинке», численным методом. Однако скорость и качество ее работы таковы, что она способна найти решение многих сложных задач, ранее совершенно недоступных даже огромным коллективам людей, и представить это решение в наглядном и понятном нам виде таблиц, графиков, рисунков или кинофильмов.

Уже эти новые возможности начинают сильно менять характер работы физика-теоретика или математика. В пер-

вую очередь изменяется само понятие о том, что значит решить задачу. Если, скажем, мы хотим изучить движение двух грузиков, связанных пружинками, нам достаточно получить уравнение (5.1), а все остальное предоставить машине. С такой же легкостью ЭВМ разберется и с движением пяти, десяти или ста грузиков... Так что же, мы с вами понапрасну теряли время на задачи, с которыми лучше справится ЭВМ? Вовсе нет! Для нас грузики и пружины не были самоцелью. Они представляли собой простые механические модели гораздо более сложных физических систем. Кроме того, нас интересовали не движения отдельных грузиков, а качественное поведение системы в целом. Мы старались выявить такие закономерности в движениях грузиков, которые позволили бы нам получить ясную, легко охватываемую нашей интуицией, физическую картину всех явлений. Уяснив эту картину, мы смогли затем разобраться в гораздо более сложных вещах, к которым мы иначе и не смогли бы подступиться. Здесь работали наше воображение, интуиция и, если хотите, чувство — качества, которых машины, увы, пока лишены.

Речь идет не столько о «пяти чувствах», сколько о личности человека, отражающей как историю всего человечества, так и неповторимые отдельные особенности индивидуальности. Но, казалось бы, наука — это коллективное творчество, и можно усомниться в том, играют ли такую уж большую роль сугубо личные качества в работе ученого. На это нет простого ответа, и в предыдущих главах много говорилось о сложном характере отношений между творческой личностью и творческим коллективом в науке. Она, безусловно, не могла бы существовать без коллективной работы многих ученых. Но наука быстро выродилась бы и в том случае, если бы в ней перестали появляться «одинокие охотники», люди, способные находить совершенно новые, оригинальные пути. Вспомните хотя бы о тех ученых, с идеями которых мы познакомились! Кстати, они сами много размышляли на эти темы. Вот, например, что говорил Максвелл о роли эмоций в научном исследовании.

«Есть люди, которые могут полностью понять любое выраженное в символической форме соотношение или закон как соотношение между абстрактными величинами... Другие получают большее удовлетворение, следуя за геометрическими формами, которые они чертят на бумаге или строят в пустом пространстве перед собой. Иные же не удовлетворяются до тех пор, пока не перенесутся в созданную ими обстановку со всеми своими физическими силами. Узнав, с какой скоростью проносится в пространстве планета, они испытывают от этого чувство восхитительного возбуждения. Вычисляя силы, с которыми притягивают друг друга небесные тела, они чувствуют,

как напрягаются от усилия их собственные мышцы. Для этих людей слова «импульс», «энергия», «масса» не сводятся к абстрактным выражениям результатов научного исследования. Эти слова имеют для них глубокий смысл и волнуют их душу, как воспоминания детства».

Можно, конечно, вообразить, что машины будущего смогут в какой-то степени уподобиться людям первой или второй категории. Но чтобы они могли научиться воспринимать научные идеи так же эмоционально, как Максвелл (к «иным же», несомненно, относится он сам!), этого, пожалуй, не станет утверждать даже самый безоглядный пропагандист «искусственного интеллекта». Впрочем, оставим разговор о том, чего машины не могут, и вернемся к тому, чем они реально помогают нам уже сегодня. Отвлечемся пока от захватывающей перспективы создания «искусственного интеллекта», который сможет соперничать с человеком в научном творчестве, и посмотрим, как человек может плодотворно сотрудничать с ЭВМ.

Может ли человек «дружить» с ЭВМ

Вопрос этот немного запоздал, ибо ответ на него слишком очевиден. Не только может, но эта «дружба» развивается столь бурно, что уже сейчас появились, например, физики-теоретики, которые буквально не могут жить без ЭВМ. Некоторые даже на время забросили свои физические задачи, чтобы вернуться к ним после того, как в общении с ЭВМ они добьются от нее лучшего понимания этих задач. Так что для некоторых это уже не «дружба», а настоящий серьезный «роман» с ЭВМ! Если машина — всего лишь добросовестный вычислитель, всего лишь честный исполнитель воли ее патрона, которого буднично называют «пользователем», то как понять эту страсть?

Дело, конечно, не только в том, что машина выполняет для нас расчеты, на которые не хватило бы никаких человеческих сил. Главное, она может подсказать нам совершенно новые возможности, заложенные в математических моделях физической реальности, и тем подтолкнуть нас к открытию новых фактов и к созданию новых идей. Машина сама не удивляется и не восхищается, но она может удивить и восхитить нас! Эта мысль была, несомненно, чужда даже наиболее проницательным ученым прошлого века. В своем описании аналитической машины Бэббеджа леди Лавлейс писала: «Аналитическая машина не претендует на то, чтобы создавать что-то действительно новое. Машина может выполнить все то, что мы умеем ей предписать». С этим

был вполне согласен Бэббедж, и точно так же, очевидно, думали Максвелл и Кельвин.

Совсем иначе смотрели на эту проблему основатели теории современных ЭВМ Джон фон Нейман (1903–1957) и Алан Тьюринг (1912–1954)*). В своей знаменитой статье «Может ли машина мыслить?» (1952 г.) Тьюринг, склонявшийся к положительному ответу на этот вопрос, писал: «...меня машины удивляют очень часто... Мнение, что машины не могут чем-либо удивить человека, основывается, как я полагаю, на одном заблуждении, которому в особенности подвержены математики и философы. Я имею в виду предположение о том, что коль скоро какой-то факт стал достоянием разума, тотчас же достоянием разума становятся все следствия из этого факта. Во многих случаях это предположение может оказаться весьма полезным, но слишком часто забывают, что оно ложно».

Такой же вопрос, только в более конкретной форме, ставит фон Нейман в 1946 г.: «Какие стороны чистой и прикладной математики можно развить, используя крупные автоматические вычислительные машины?» Ответ он дает очень точный. «Известные нам сегодня аналитические методы представляются непригодными для решения проблем, возникающих в связи с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, а в действительности — для решения практически всех видов нелинейных задач математики. Это в особенности ярко проявляется в динамике жидкости. В этой области были решены в аналитическом виде лишь самые простые задачи... Прогресс в математическом анализе сегодня застыл практически по всему фронту нелинейных проблем... и лишь по-настоящему эффективные быстродействующие вычислительные устройства... могут дать нашей интуиции указания, необходимые для действительного прогресса во всех областях математики...»

Там же фон Нейман подчеркивает, что большинство этих трудных и даже неприступных математических задач родилось в физике и до сих пор физические эксперименты в какой-то мере давали подсказки нашей интуиции. Однако возможности физических экспериментов ограничены, а их истолкование часто очень затруднено и неоднозначно. В реальной жизни редко удается сделать идеальную карикатуру на явление,

*) Эти математики не только разрабатывали теорию, но и непосредственно участвовали в строительстве первых в мире автоматических ЭВМ с хранимой программой, предлагая новые математические и инженерные идеи.

всегда остается слишком много лишних деталей. То ли дело — «поставить эксперимент» на вычислительной машине! Здесь мы вольны взять идеальную математическую модель изучаемого явления и вместо экспериментов рассчитывать ее поведение в разных условиях. После того как самые яркие, интересные явления будут обнаружены, можно «испортить» модель, приблизив ее к физической реальности. Такой подход к решению физических (да и математических) задач называют по-разному: «численным моделированием», «машинным или численным экспериментом». Дело не в названии. Важна идея экспериментального подхода к решению математических задач, когда мы не просто выполняем численный расчет в общем понятного нам явления, а пытаемся подсмотреть нечто совсем новое, неизвестное в построенных нами условиях.

Наверное, стоит пояснить суть машинного эксперимента на знакомом примере. Допустим, мы изучаем дислокации в модели Френкеля — Конторовой и у нас возникла туманная пока идея, что небольшие сгущения или разрежения атомов могут двигаться по цепочке, примерно как импульсы в натянутой струне. Мы заложим в машину программу решения уравнения Френкеля — Конторовой при различных начальных условиях. Скажем, такой-то кусок цепочки атомов сдвинут на такое-то расстояние, а затем отпущен. Машина вычислит нам дальнейшие события в цепочке, а современная ЭВМ может представить результат в виде набора рисунков, изображающих состояние цепочки в последовательные моменты времени или даже изготовит для нас кинофильм, в котором события будут развиваться с удобной для человеческого восприятия скоростью (т. е. в удобном масштабе времени). Рассматривая эти картинки или фильмы, мы могли бы обнаружить рождение солитонов из довольно нерегулярных первоначальных возбуждений «рождение солитона из пены», столкновение солитонов и антисолитонов, образование бризеров, — в общем, всю солитонную физику.

Примерно так и произошло второе рождение солитонов, только не столь просто и быстро. Настоящий машинный эксперимент, в котором ищется что-то действительно новое, во многих отношениях не проще, чем реальный физический эксперимент. Он требует хорошего оборудования — ЭВМ плюс всякие дополнительные устройства для обработки и наглядного изображения информации. Его обычно выполняет целый коллектив ученых: математики, вычислители — программисты, физики. Надежную работу ЭВМ обеспечивает коллектив обслуживающих ее инженеров и техников. Все это очень сложно, и может возникнуть вопрос: «А удастся ли таким способом обнаружить что-то действительно неожиданное?»

Во-первых, вы можете рассчитывать получить одно, а на деле выйдет совсем другое. «Ищешь Индию — найдешь Америку!» Так получилось и с солитоном. Сначала, как мы увидим, о солитонах вовсе никто и не думал, искали ответ на вопросы, не имеющие к ним никакого отношения.

Во-вторых, и это самое замечательное, невероятно быстрое развитие технологии вычислительных машин привело к тому, что в недалеком будущем ЭВМ станет нашим постоянным спутником, с которым можно будет не расставаться буквально ни на час. Уже сегодня существуют машины, умеющие делать больше, чем те, которые удивляли Тьюринга и фон Неймана, но уместающиеся на письменном столе или даже в портфеле. Программы для такой машины можно записывать на обычный кассетный магнитофон, а полученные ею результаты (числа, таблицы, графики) — читать на экране обычного телевизора. С нею можно играть в интересные игры или решать с ее помощью труднейшие задачи. С такой машиной каждый может попытаться стать Фарадеем или хотя бы Эрстедом в машинном эксперименте.

Трудно сказать, интересны ли были бы такие опыты Фарадею или Эрстеду. Скорее всего, они показались бы им чересчур абстрактными, лишенными жизни. Но вот Эйлер или Гаусс наверняка пришли бы в восторг. Они сами были феноменальными вычислителями, а идея численного эксперимента была им близка и понятна. В сущности, Эйлер и ввел понятие о численном эксперименте в математике: «Покажется немало парадоксальным приписывать большое значение наблюдениям даже в той части математических наук, которую обычно называют чистой математикой, ибо существует распространенное убеждение, что наблюдения ограничиваются физическими объектами, которые воздействуют на наши чувства. Поскольку мы уверены, что числа принадлежат одному лишь чистому разуму, нам очень трудно представить себе пользу наблюдений и квазиэкспериментов при изучении природы чисел. В действительности же... известные сегодня свойства чисел были, по большей части, открыты путем наблюдения...»

Эйлер делал «квазиэксперименты» своими руками. Возможно, что перенапряжение, вызванное огромной вычислительной работой, и довело его до слепоты. Если бы у него была хотя бы карманная ЭВМ, он бы, конечно, экспериментировал с числами на ней, и кто знает, сколько «наблюдений» он сумел бы сделать! Современные ученые, в общем, стараются не упускать эти возможности, однако нужно сказать, что новые отрасли науки — «экспериментальная» мате-

матика, «вычислительная» физика и т. п. — пока не получили всеобщего признания.

А между тем, пока неверующие сопротивляются, а равнодушные привыкают, люди, влюбленные в ЭВМ, активно с ними сотрудничают и отыскивают новые тропинки в неисследованные земли. Самая первая такая тропинка и привела в страну, где живут солитоны. Как ни странно, на эту тропинку вывели поиски природы образования хаоса в физических системах. Странно это потому, что солитоны — одинокие существа, склонные к чрезвычайно упорядоченному образу жизни, а хаос — это крайняя степень беспорядка. Какая же цепь связала солитоны с хаосом? Прежде чем ответить на этот вопрос, придется сделать небольшое отступление.

Воспоминание о хаосе

Напрасно в годы хаоса искать конца благого...

Б. Пастернак

О, дум заснувших не буди!
Под ними хаос шевелится.

Ф. Тютчев

Мы, люди XX в., не любим беспорядка, и слово «хаос» для нас почти ругательное. Примерно такой смысл вкладывает в него Борис Пастернак. Поэт же прошлого века, Федор Иванович Тютчев, вкладывает в это слово совсем иной смысл. Чуть раньше он называет его «древним» и «родимым». Он, конечно, имеет в виду хаос древних греков — некое первичное состояние мира, все порождающее и все поглощающее, или «первоматерию». На современном языке такой хаос больше всего похож на состояние нашей Вселенной в первые мгновения после «Большого взрыва». Одна из глубоких проблем современной космологии — понять, как из этого хаотического состояния образовалась современная упорядоченная Вселенная с ее галактиками и звездами. На некоторых этапах развития Вселенной солитоны, видимо, помогали ей упорядочиваться. Мы уже вскользь упоминали об этом, когда познакомились со спиральными рукавами галактик.

Другой тип беспорядочного движения хорошо известен каждому из наблюдений над течением воды. Проще всего увидеть рождение хаотического движения воды, если двигать какой-нибудь предмет плохо обтекаемой формы. Уже при небольшой скорости движения возникают вихри. При очень большой скорости может возникнуть так называемый турбулентный след, подобный тому, который наблюдается за кормой быстро движущегося корабля. В области следа частицы

воды движутся совершенно беспорядочно, хаотически. Такие движения жидкости впервые начали изучать Кельвин, Буссинеск, Рейнольдс и Рэлей. Термин «турбулентность» ввел в обиход Кельвин, произведя его от латинского «turbulentus» (беспокойный, беспорядочный). Первые опыты по изучению турбулентного движения воды в обычных водопроводных трубах выполнил Рейнольдс в 1883 г.

Турбулентность – очень сложное явление, точнее комплекс явлений. Наблюдается много разных типов турбулентности, по-разному беспорядочных. Простых же математических моделей турбулентных движений долго не удавалось найти. Такие модели появились лишь недавно, и в их изучении основную роль играют машинные эксперименты. Это не удивительно, так как турбулентность тоже тесно связана с нелинейностью, и к ней в полной мере относятся приведенные выше слова фон Неймана.

Если у вас есть простая вычислительная машинка, вы можете изучить самую простую модель турбулентного движения. Эта модель поразительно проста, и тем не менее она воспроизводит характерные черты очень сложных и широко распространенных явлений образования хаоса. Существует целый класс подобных моделей, но мы приведем здесь одну. Для ее изучения нужно знать лишь три арифметических операции!

Представьте себе ученую «блоху», владеющую всеми тремя действиями арифметики и прыгающую не просто так, а по определенному закону. Если она в момент времени $t_n = n \cdot \Delta t$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) сидит в точке x_n на оси x , то в следующий момент $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ она перепрыгивает в точку $x_{n+1} = b - x_n^2$, где b – некоторое выбранное число, свое для каждой блохи (назовем ее, скажем, «постоянной блохи»). Пусть блоха начинает движение из некоторой точки отрезка $-2 < x < +2$. Наша задача – определить, куда она может убежать за большое время, т. е. представить себе, каким может быть x_n при больших значениях n .

Как ни проста эта задача на вид, вам едва ли удастся найти ее решение без помощи микрокалькулятора. Однако прежде чем приступить к экспериментам, стоит немного подумать, чего от них можно ожидать. Рассмотрим кривую AA_0A_1 (рис. 7.1), соответствующую уравнению $x^2 + x = b$. Если x_n стремится к некоторому пределу, то предельное значение будет лежать на этой кривой.

Численные эксперименты, однако, показывают, что только блохи, для которых точки с координатами (x_0, b) лежат внутри фигуры $A_0B_1B'_1A'_0$ (кривая A'_0A_0 получается зеркальным отражением относительно оси Ob), приближаются к кривой

A_0A_1 . При этом на ветвь A_0A_1 они никогда не попадают, а если их постоянные b и начальные координаты x_0 таковы, что точка (x_0, b) лежит в заштрихованной области, то такие блохи убегают на бесконечность. Судьба наших ученых блох с постоянной $b < 0,75$ полностью определена. Что бы они ни

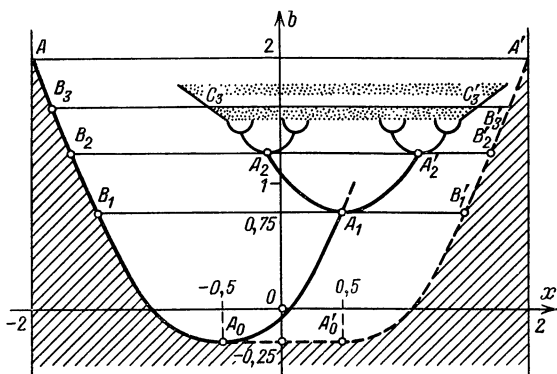


Рис. 7.1

делали, они либо погибают «в бесконечности», либо притягиваются к точкам на кривой A_0A_1 , где мы их легко ловим. Почти столь же печальна судьба блох, у которых (x_0, b) лежит в области $B_1B_2B'_2B'_1$. Они в конце концов попадают на кривую $A_2A_1A'_2$, и при достаточно большом n перескакивают на каждом шаге с $A_1A'_2$ на A_1A_2 и обратно. Уравнение этой кривой тоже легко определить, воспользовавшись тем, что в пределе больших n , после двух последовательных скачков, блоха оказывается вблизи той же ветви, т. е. $x_{2+n} \approx x_n$. Отсюда находим $x_{n+2} = b - (b - x_n^2)^2$ и в пределе, когда $x_{n+2} \approx x_n \approx x$, находим для x квадратное уравнение $x^2 - x + 1 = b$, одно из решений которого дает кривую $A_2A_1A'_2$.

До сих пор мы могли бы более или менее точно предсказать, что будет происходить. При увеличении «блошной» постоянной все, однако, быстро усложняется. Кривые, которые их притягивают, продолжают раздваиваться, и при $b > 1,5$ скачки становятся почти непредсказуемыми, беспорядочными. На рисунке этому соответствует зачерненная область. Например, если блоха начинает движение на отрезке $B_3B'_3$, то она притянется к отрезку $C_3C'_3$. Предельные значения ее координат плотно заполняют этот отрезок (на самом деле, как показывают дальнейшие эксперименты, устройство зачер-

ненного притягивающего множества гораздо сложнее, читатель может попробовать изучить его в экспериментах).

Изучению таких моделей посвящается сейчас немало серьезных научных работ, и блошиная модель заимствована из современного физического журнала. Это, конечно, только первый шаг на пути к пониманию турбулентности, но похоже, что он выведет на дорогу, двигаясь по которой, можно будет полностью разобраться в природе этого сложного явления. «Так о великих вещах помогают составить понятие малые вещи, пути намечая для их достижения» (Лукреций Кар).

Турбулентное поведение может возникать даже в простых физических системах. Раньше физиков в основном интересовал хаос несколько иной природы — молекулярный хаос, возникающий в системах из очень большого числа взаимодействующих друг с другом частиц. Уже Д. Бернулли и Ломоносов понимали, что тепловые явления объясняются беспорядочным движением молекул. Однако только после работ Клаузиуса, Максвелла и Больцмана это представление превратилось в настоящую физическую теорию.

В этой теории природа происхождения совершенно беспорядочных движений молекул приписывалась очень частому столкновению молекул между собой. При столкновениях они обмениваются энергией, и молекулы в основном имеют энергии, близкие к среднему значению, одинаковому для всех молекул (тепловой энергии). Легко понять, что молекулы воздуха при комнатной температуре действительно должны двигаться совершенно хаотично. В 1 л воздуха содержится $n = N_A/22,4 \text{ л} \sim 3 \cdot 10^{22}$ молекул (N_A — постоянная Авогадро). Их средняя скорость v равна $\sqrt{3RT}$ (где R — газовая постоянная), т. е. около 500 м/с! Среднее расстояние l , которое молекула пробегает без столкновений, легко оценить с помощью соображений размерности. Оно очевидно зависит от размера молекул d и от числа молекул в единице объема и равно примерно $l \approx 1/(d^2n)$, т. е. $l \approx 10^{-5}$ см. Поэтому в 1 с молекула испытывает примерно $v/l \approx 10^{10}$ столкновений!

В таких условиях, конечно, нет никакого смысла следить за движением отдельной молекулы. Все они находятся в равном положении, можно говорить лишь об их средней скорости и средней энергии, которые и определяют давление и температуру газа. Что, однако, произойдет, если уменьшать число молекул в единице объема или понижать температуру? Столкновения будут становиться все реже и реже, а в конце концов движение может потерять неупорядоченный характер.

До какого предела движение останется хаотическим и можно пользоваться для описания его состояния такими усредненными характеристиками, как давление и температура? Ни Максвелл, ни Больцман не знали ответа на этот вопрос, да и сейчас, сто лет спустя, мы не умеем на него ответить. Возможно, что на столь общий вопрос и нет единственного ответа. Естественно попробовать сузить вопрос.

Что происходит при понижении температуры? При достаточно низкой температуре газ превратится в твердое тело. Рассмотрим поэтому движение частиц в кристалле. Сделаем еще одно упрощение и возьмем одномерный кристалл, который мы привыкли заменять моделью грузиков, связанных пружинками. Вот тут-то и выявляется в совершенно обнаженном виде самая суть вопроса. При достаточно низкой температуре грузики (молекулы) колеблются около своих положений равновесия, и беспорядок выражается в том, что фазы их колебаний распределены совершенно хаотически. Амплитуды колебаний и максимальные скорости также должны беспорядочно изменяться, но в среднем они должны быть одинаковы для каждого грузика. Возможен ли такой молекулярный беспорядок в модели грузиков?

Ответ на это, на первый взгляд, отрицательный. Вспомним линейную теорию движений грузиков, с которой мы познакомились в гл. 4. Мы выяснили, что все движения системы из N грузиков представляют собой сумму N мод. Если бы при этом вначале была одна гармоника с частотой ν_1 , то через время $T_1 = 1/\nu_1$ наша система возвратилась бы в начальное состояние.

Если возбуждены все N независимых мод, то такое возвращение произойдет за время $T_N = 1/\nu_N$, где ν_N — минимальная частота...

Читатель. Постойте! А не нужно ли нам учесть трение?

Автор. Вы забыли, что мы имеем дело с молекулами, а не с реальными грузиками и пружинками! С молекулярной точки зрения, трение — это просто перераспределение энергии — переход энергии упорядоченного движения в энергию хаотического теплового движения. Если пренебречь внутренней структурой молекул и их взаимодействием с окружающей средой, то ни о каком трении говорить нельзя.

Читатель. Я, может быть, неточно выразился. Я хотел сказать, что модель, в которой моды не зависят друг от друга, лишь приближенная. На самом деле они как-то связаны друг с другом?

Автор. Конечно связаны, и естественно предположить, что взаимодействие одной гармоники с остальными будет приво-

доть к потере еѳ энергии, т. е. действовать подобно трению. Тогда упорядоченное движение одной гармоникѳ будет переходить в хаотическое движение остальных.

Итак, независимость мод связана с линейностью сил, связывающих грузики. Если нарушить линейность (скажем, пружины не подчиняются закону Гука), то можно ожидать, что движения грузиков станут хаотичными, по крайней мере в том случае, когда число грузиков N достаточно велико. Примерно так думало большинство физиков, в том числе и Энрико Ферми. Впрочем, возможно, что у Ферми были кое-какие сомнения на этот счет. Вероятно, его интересовало также, сколь большим должно быть число N . Достаточно ли велико $N = 100$ или же надо взять $N = 1\,000\,000$? К сожалению, Ферми не успел получить ответа на этот вопрос. Так или иначе, но первый серьезный вопрос, который он решил задать ЭВМ, был вопрос об установлении теплового равновесия в цепочке грузиков и нелинейных пружин. Результат машинного эксперимента оказался совершенно неожиданным.

ЭВМ удивляет Энрико Ферми

Энрико Ферми был одним из величайших физиков нашего века — теоретиком и экспериментатором. Его имя навсегда связано с открытием и освоением ядерной энергии, исследованием элементарных частиц и со многими другими областями физики. Менее известно, что он многие годы серьезно интересовался различными нелинейными явлениями, а незадолго до смерти заинтересовался турбулентностью и выполнил несколько работ по гидродинамике. Одна из них сделана совместно с фон Нейманом, и, возможно, что не без влияния фон Неймана Ферми начал думать об освоении неизвестных земель «нелинейной физики» с помощью экспериментов на ЭВМ.

Прежде чем рассказывать об этих экспериментах, надо все же сказать хоть несколько слов о Ферми и фон Неймане, этих двух великих ученых, заложивших основы для многих крупнейших достижений науки и техники XX в. В их судьбах можно проследить поразительные параллели. Ферми родился двумя годами раньше фон Неймана, а прожили они оба до обидного мало, оба ушли из жизни в 53 года, в тот момент, когда они были полны новых замыслов. И Ферми, и фон Нейман были одарены от природы необычайными способностями к научной работе и, сверх того, абсолютной памятью.

Способности фон Неймана в математике и лингвистике проявились необычайно рано. Известно, что в возрасте 6 лет он любил обмениваться с отцом шутками на древнегреческом языке, а впослед-



Энрико Ферми
(1901 – 1954)



Джон фон Нейман
(1903 – 1957)

ствии свободно говорил и писал на нескольких языках. Известным его хобби было изучение истории, в особенности культуры Византии. Говорят, что в этой области он был первоклассным специалистом. Естественно, что о таком человеке рассказывали множество историй и легенд.

Стоит привести одну подлинную историю, рассказанную Г. Голдстайном, много лет знавшим фон Неймана и работавшим вместе с ним над созданием одной из первых в мире ЭВМ. Молодой ученый обратился к фон Нейману с просьбой помочь найти долго не дававшееся ему доказательство придуманной им теоремы. Нейман немедленно, не задумываясь, дал это доказательство и записал его на доске. Через неделю юноша подошел к нему на приеме, ежедневно устраивавшемся Нейманами для друзей и сотрудников, и, смущаясь, сказал, что не может вспомнить доказательство. В ответ Нейман тут же, в заполненной гостями комнате, почти слово в слово повторил доказательство!

Столь же легендарной личностью был Ферми. Инженер Адольф Амидей, снабжавший пятнадцатилетнего Ферми книгами по математике, вспоминает, что «... Энрико достаточно было прочесть книгу... один раз, чтобы знать ее в совершенстве... Когда он возвращал прочитанную книгу Дини по математическому анализу, я предложил ему оставить ее у себя, чтобы он мог заглядывать в нее... Ответ Ферми был поразительным: — Благодарю Вас, в этом нет нужды, я уверен, что запомнил все необходимое. Вообще, несколько лет спустя я буду понимать ее основные идеи еще более отчетливо, и если мне понадобится какая-нибудь формула, я легко выведу ее». Многочисленные свидетельства учеников и сотрудников Ферми подтверждают, что юный Энрико вполне объективно оценивал свои уникальные способности.

Встреча двух универсальных гениев — физика и математика — произошла в Америке, куда оба уехали, не пожелав оставаться под властью фашистских режимов. Ученик и сотрудник Ферми Эмилио Сегре, открывший вместе с О. Чемберленом и другими антипротон (1955 г.), рассказывает: «Ферми был чем-то вроде оракула, к которому любой физик мог обратиться за помощью... Мне помнится, как он и фон Нейман обсуждали гидродинамические задачи. Это было похоже на соревнование у доски в кабинете Ферми — кто первым решит поставленную задачу (первым обычно оказывался фон Нейман, который умел фантастически быстро считать). Однажды я прервал такое обсуждение, так как первоклассный знаток электроники из моей группы не мог справиться с новой и очень трудной задачей. Дело было срочное, и мы в отчаянии заглянули к Ферми. Примерно за 20 минут он придумал схему, которая могла решить вопрос... Другим оракулом лаборатории был фон Нейман. Однажды один известный физик-экспериментатор и я целый день безуспешно ломали голову над задачей, для решения которой нужно было взять некий интеграл. Поставивший нас в тупик интеграл был написан на доске, когда... мы увидели идущего по коридору фон Неймана. «Не можете ли Вы помочь нам с этим интегралом?» — спросили мы у него. Фон Нейман... глянул на доску и продиктовал ответ. Мы совершенно остолбенели... Подобные примеры можно было бы приводить без конца. Оба оракула относились друг к другу с дружбой и восхищением, а общий интерес к компьютерам укреплял эту дружбу. Ферми всегда был знатоком численных расчетов и сразу же обратил внимание на перспективы использования быстродействующих ЭВМ. Он затратил много времени на освоение ЭВМ и много работал на них. Выдающаяся роль фон Неймана в разработке ЭВМ, без сомнения, общеизвестна».

Но вернемся к задаче, поставленной Ферми перед ЭВМ. Вместе с математиками Станиславом Уламом и Джоном Пастой он в 1952 г. задумал выполнить обширные машинные эксперименты по исследованию нелинейных задач. Первой из них и была задача о порождении теплового хаоса в цепочке грузиков с нелинейными пружинками. Как вспоминал С. Улам, «Ферми часто говорил, что будущие фундаментальные физические теории будут, вероятно, основаны на нелинейных уравнениях, и поэтому было бы полезно попрактиковаться в математике, необходимой для понимания нелинейных систем. План состоял в том, чтобы начать с простейшей, по возможности, физической модели... затем постепенно увеличивать сложность и общность решаемых на машине задач ... Решение всех этих задач послужило бы подготовкой к установлению, в конце концов, модели движений системы, в которой должны были бы наблюдаться «перемешивание» и «турбулентность»... За одно лето Ферми весьма быстро научился программировать задачи для ЭВМ и мог не только спланировать общую схему расчета, но и самостоятельно провести подробное программирование

всей задачи. Результаты вычислений, проведенных на старой машине МАНИАК, оказались интересными и весьма неожиданными для Ферми. По его мнению, они явились некоторым откровением.» Машина сумела настолько удивить Ферми, что он, уже будучи смертельно больным, интересовался продолжением расчетов и говорил, что эта одна из самых важных задач, с которыми он когда-либо встречался. Что же так поразило Ферми?

Ферми, Паста и Улам предложили машине рассчитать колебания системы из 32 грузиков, связанных пружинками, которые при растяжении их на Δl создают возвращающую силу $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. При этом нелинейная поправка $\alpha(\Delta l)^2$ считалась малой по сравнению с основной, линейной силой $k\Delta l$. Таким образом, машина должна была решать систему из 32 уравнений, подобных уравнениям (4.8), но с добавленными в правой части нелинейными силами $\alpha[(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2]$. Так как эти добавки малы, то можно следить не за движениями отдельных частиц, а за изменением синусоидальных мод линейных уравнений, получающихся при $\alpha = 0$. При $\alpha \neq 0$ моды перестают быть независимыми, и энергия медленно (по сравнению с их периодами) перекачивается из одной моды в другую.

Рассмотрим движение из начального состояния, в котором возбуждена одна 1-я мода (обозначим ее период буквой T). Сначала действительно начинается перекачивание энергии в дру-

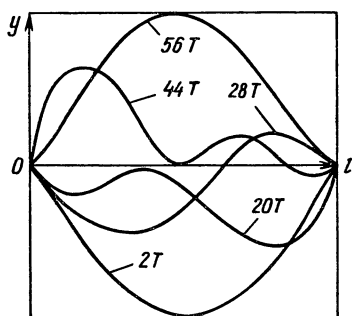


Рис. 7.2

гие моды. Однако никакой хаотичности в этом не наблюдается (см. рис. 7.2). При $t \approx 20T$ возбуждена в основном 3-я мода. Затем начинает «солироваться» 2-я мода (при $t \approx 28T$). При $t \approx 44T$ энергия оказывается сосредоточена в 3-й моде, и при $t \approx 56T$ снова возвращается к 1-й. Более высокие моды возбуждаются мало, максимальная энергия 4-й моды меньше половины энергии первой (т. е. полной энергии), а 5-я мода

может получить не более шестой части полной энергии. На рис. 7.2 изображены вычисленные отклонения грузиков в различные моменты времени (масштаб по оси y для удобства сильно увеличен).

Может быть, это случайность? Нет, при увеличении числа грузиков, при изменении α , при изменении самой формы нелинейной силы (скажем, $\beta(\Delta l)^3$ вместо $\alpha(\Delta l)^2$) это явление

сохраняется. Моды не сливаются в общий беспорядочный хор, а выделяют несколько солистов, которые выступают по очереди, остальные им аккомпанируют. Когда возвращается первый солист, все начинается сначала! Время возвращения T_B (в нашем случае $T_B \approx 56T$) зависит от числа N , от вида нелинейности, но солирование низших мод и возвращение при $T = T_B$ наблюдалось всегда.

Полученный результат можно наглядно изобразить простой музыкальной пьесой (см. рис. 7.3). Здесь «записаны» моды,



Рис. 7.3

которые последовательно звучат на струне, соответствующей нашей системе грузиков. Каждой моде соответствует нота: 1-й — нижнее «до», 2-й — «до» октавой выше и т. д. *). Изображенные нотами моды звучат в отдельные моменты, только громкость мы изобразили длительностью звучания ноты. В два раза более громкая нота звучит у нас в два раза дольше и т. д. На рис. 7.3 представлена только половина «пьесы», далее происходит возвращение к начальному «до» в обратном порядке.

Итак, вместо ожидаемой какофонии, когда одновременно звучат с одинаковой силой все моды, получается примитивная, но вполне музыкальная пьеса. Нелинейная система ведет себя действительно совершенно неожиданно. На начальное возбуждение она отвечает целой пьеской. Если возбудить систему иначе, скажем, начать со 2-й моды, получится другая пьеска. Не «струна», а небольшой композитор-автомат! Кстати, к современным ЭВМ нетрудно присоединить устройства, которые будут преобразовывать движения струны в такие музыкальные пьесы. Они будут звучать гораздо интересней, чем пьеса, изображенная здесь, так как все переходы от одного аккорда в другой происходят непрерывно, а кроме того,

*) Нижнее «до» большой октавы имеет частоту примерно 64 Гц. Будем просто считать, что параметры нелинейной системы грузиков подобраны так, что частота 1-й моды равна 64 Гц.

есть небольшая примесь высших мод, которая даст богатый тембр...

Признаемся, что музыкальная аналогия не приходила в голову авторам рассказанной замечательной работы, однако их результат удивителен и без всяких аналогий. Удивил он и нескольких других физиков и математиков, которые начали методично разбираться, в чем тут дело. Особенно заинтересовались явлением Ферми — Пасты — Улама американские физики Мартин Крускал и Норман Забуски, которые познакомились с ним «из первых рук». Они продолжили машинные эксперименты и, кроме того, начали размышлять, не похожа ли нелинейная струна на что-нибудь знакомое. Сначала они просто повторяли численные эксперименты Ферми — Пасты — Улама (мы будем, как это принято, пользоваться сокращением ФПУ). Потом попробовали изучить движения непрерывной струны, в которую переходит цепочка ФПУ при неограниченном увеличении числа грузиков и уменьшении расстояний между ними. После многих проб и ошибок они пришли к удивительному результату — наилучшее описание движений такой нелинейной струны при достаточно малых отклонениях ее от положения равновесия дается уравнением Кортевега — де Фриза!

Возвращение солитона Рассела

И долго ждал ты час,
назначенный судьбой.

В. Брюсов

Вы, конечно, помните, что Кортевег и де Фриз получили свое уравнение при попытке найти точное математическое описание солитона Рассела с небольшой амплитудой. Теперь выясняется, что то же самое уравнение может описывать совершенно другие физические явления. Это, конечно, не случайно. Уравнение КдФ годится для математического описания самых разных нелинейных волн. На самом деле это простейшее уравнение для любых слабо нелинейных и слабо диспергирующих волн.

Если оба эти эффекта (нелинейность и дисперсия) настолько малы, что ими можно пренебречь, то уравнение КдФ описывает волны произвольной формы, бегущие в одном направлении. Иными словами, форма волны $y(t, x)$ задается произвольной функцией $y(t, x) = f(x - v_0 t)$. Для волн на мелкой воде $v_0 = \sqrt{gh}$, где h — глубина. Напомним, что воду можно считать мелкой, если минимальная длина синусоидальных волн (λ), входящих в разложение Фурье функции f , во много раз пре-

вышает глубину h . Чтобы не думать о разложении Фурье, можно просто считать, что волна имеет синусоидальную форму.

Если теперь допустить, что имеется малая дисперсия, т. е. что фазовая скорость v синусоидальной волны немного зависит от λ , то простейшая зависимость будет иметь вид (ср. с формулами (5.17), (5.21))

$$v = v_0 \left(1 - \alpha \frac{h^2}{\lambda^2} \right),$$

где α — некоторое число, а $v_0 = \sqrt{gh}$. Для уравнения КдФ, описывающего волны на мелкой воде, $\alpha = \frac{2}{3}\pi^2$. Однако для волн в других средах значение α будет другим, а величина h , имеющая размерность длины, будет иметь совсем иной смысл.

В гл. 5 мы уже сравнивали дисперсию длинных волн на мелкой воде и в цепочке упруго связанных атомов (формулы (5.21) и (5.17)), и убедились, что зависимость фазовой скорости от λ имеет при больших значениях λ один и тот же вид. Достаточно заменить h на $\frac{1}{2}a$, где a — расстояние между атомами, и из закона дисперсии волн на воде получится закон дисперсии длинных волн в цепочке атомов. Зная этот удивительный факт, совсем не трудно додуматься и до того, что в других физических системах закон дисперсии длинных волн может быть таким же. Однако такая мысль многие десятилетия никому не приходила в голову. Может быть, это произошло потому, что волнами на воде и в кристаллах интересовались разные исследователи, может быть, по другим причинам... Во всяком случае, ясная идея о существовании такого универсального закона дисперсии длинных волн сформировалась совсем недавно, уже в эпоху общего увлечения солитонами.

Чтобы теперь понять, как устроены волны КдФ, нужно ввести простейшую мыслимую нелинейность. Мы знаем, что скорость линейных диспергирующих волн не зависит от амплитуды, а зависит лишь от длины волны. Скорость же распространения нелинейных волн зависит и от амплитуды. Самая простая зависимость — линейная, когда увеличение скорости прямо пропорционально увеличению амплитуды. Именно она и реализуется для волн КдФ, а будучи самой простой, естественно, встречается и во многих других физических системах. Забуски и Крускал обнаружили, что такая нелинейность хорошо описывает нелинейные взаимодействия атомов в решетке. Еще раньше, в 1958 г., советский физик Р. З. Сагдеев подметил аналогию между некоторыми волнами в плазме и волнами на мелкой воде и показал, что в плазме также могут распространяться уединенные волны. Плазмой

в это время уже занимались многие физики, и это наблюдение не осталось незамеченным. Вскоре удалось показать, что эти волны в плазме также можно описывать с помощью КдФ-уравнения. Это решило судьбу КдФ-уравнения, которое было извлечено из забвения и стало известно широкому кругу физиков и математиков. Знаменитым оно стало после того, как Забуски и Крускал выяснили, что оно описывает солитоны, которые не изменяются после столкновения друг с другом, и что можно найти его самое общее решение. Это удалось в 1967 г. американским ученым Гарднеру, Грину, Крускалу и Миуре. От их работы обычно отсчитывают начало бурного развития науки о солитонах.

Выглядит уравнение КдФ совсем не страшно. Форма волны $y(t, x)$ в момент времени t должна подчиняться соотношению

$$\dot{y} + v_0 \left(y + \frac{3}{4h} y^2 + -\frac{h^2}{6} y'' \right)' = 0.$$

Здесь точкой обозначена производная по времени при фиксированном значении координаты x , а штрихом — производная по координате в заданный момент времени t . Если нарисовать зависимость профиля волны y от координаты, то этот график будет двигаться и деформироваться с течением времени. При этом y определяет наклон касательной к графику в точке x в момент t , а \dot{y} — скорость движения точки графика $y(t, x)$ по направлению оси y . Если в некоторый момент времени t нам известна зависимость y от x (в том числе и производные y' , y'' , y'''), то уравнение позволяет найти скорости \dot{y} всех точек графика, так что можно приближенно определить его вид в следующий момент $t + \Delta t$:

$$y(t + \Delta t, x) \approx y(t, x) + \dot{y}(t, x) \cdot \Delta t.$$

Решить такое уравнение — значит по начальному графику $y(0, x)$ найти вид графика $y(t, x)$ в любой последующий момент времени. Точное решение этой очень непростой математической задачи оказалось одним из наиболее замечательных достижений математики, которое стало возможным благодаря тесному и плодотворному сотрудничеству физиков, математиков и использованию ЭВМ.

Нетрудно понять, что КдФ-уравнение описывает лишь волны, распространяющиеся в одном направлении вдоль оси x . Заметим сначала, что эффекты дисперсии определяются членом $\sim y''$, а нелинейные эффекты — членом $\sim y^2$. Если ими пренебречь, то получится совсем простое уравнение $\dot{y} + v_0 y' = 0$, которое мы обсуждали в гл. 5. Как оказалось, самое общее решение этого уравнения — любая функция от $x - v_0 t$, т. е. $y(t, x) = f(x - v_0 t)$. Чтобы найти зависимость y от x в любой момент времени, достаточно нарисовать график функции $y = f(x)$ и двигать его со скоростью v_0 ($v_0 > 0$) в положительном направлении оси x . Чтобы описать волну, бегущую в противоположном направлении, нужно взять другой знак перед v_0 .

Как вы помните, уравнение Д'Аламбера не зависело от знака v_0 и описывало волны, бегущие в обоих направлениях. Уравнение для дислокаций также обладало этим свойством. Почему же КдФ-уравнение не обладает этим свойством, в то время как волны на поверхности ручья от брошенного камня бегут в обоих направлениях *)?

Ответ на этот вопрос на самом деле очень простой. Если нас не интересует начальный момент, когда от брошенного в ручей камня начинают разбегаться две волны, то мы можем отдельно изучать одну и другую. Если эффекты нелинейности и дисперсии достаточно малы, то обе волны убегут на большое расстояние друг от друга за столь малое время, что эти эффекты не успеют сказаться, и в дальнейшем можно следить за судьбой одной из волн, забыв о существовании другой. Именно поэтому можно описывать эволюцию обеих волн одинаковым по виду уравнением с разными знаками перед v_0 . (В случае дислокаций, когда эффекты нелинейности и дисперсии всегда велики, так поступить нельзя!)

Эта идея, в сущности очень простая, привела к огромному упрощению, которое позволило Кортвегу и де Фризу правильно понять природу солитона Рассела, а спустя 70 лет привело к созданию полной математической теории солитонов. С точки зрения физиков, теория солитонов на основе КдФ-уравнения кажется наиболее понятной, так как в ней наглядно видно, каким образом уравнивание эффектов нелинейности и дисперсии приводит к образованию устойчивой уединенной волны. Мы больше не будем касаться математики солитонов, она достаточно сложна, а посмотрим на устройство солитона глазами физика.

Итак, если нет ни дисперсии, ни нелинейности, по поверхности могут распространяться импульсы любой формы, но это не солитоны. Всегда имеющиеся в физической системе малые эффекты дисперсии и трения вскоре исказят первоначальный импульс до неузнаваемости. Посмотрим, как влияет на него нелинейность. Заметим, что КдФ-уравнение с выброшенным последним членом, ответственным за дисперсию, можно решить точно. Метод решения был известен еще Лагранжу, однако его первые применения к реальным нелинейным волнам связаны с именем знаменитого немецкого математика Георга Фридриха Бернхарда Римана (1826 – 1866).

Пусть на поверхности воды образовался горбик, изображенный на рис. 7.4, кривая 1. Дальнейшая судьба этого горбика определяется тем, что скорость каждой точки графика зависит

*) Кортвег и де Фриз вывели свое уравнение из уравнения Буссинеска, которое больше похоже на уравнение Д'Аламбера и описывает волны, бегущие в обоих направлениях. Уравнение Буссинеска, однако, сложнее, чем КдФ-уравнение, и общее точное решение его неизвестно.

от ее высоты. Для волн КдФ эта зависимость простейшая:

$$v(y) = v_0 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{y}{h} \right].$$

Быстрее всех движется вершина горбика. Ее скорость равна

$$v(y_0) = v_0 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{y_0}{h} \right],$$

а скорость переднего фронта горбика, где $y = 0$, равна v_0 . Поэтому в некоторый следующий момент времени передняя

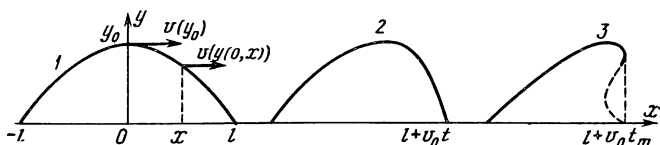


Рис. 7.4

часть горбика станет более крутой (кривая 2), а с течением времени произойдет «опрокидывание» волны (кривая 3), которое уже нельзя описать на этом простом языке. Такое опрокидывание волн все мы много раз видели, когда наблюдали прибой на берегу моря или на речной отмели. Не так легко,

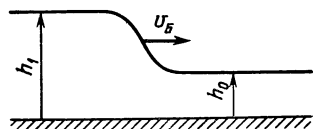


Рис. 7.5

и притом небезопасно, наблюдать другое явление, вызванное описанным увеличением крутизны фронта волны. Если приливная волна из моря входит в устье реки, то может образоваться волна в виде высокой ступеньки (рис. 7.5), которую называют *бором*. Бор — один

из примеров ударной волны. Хорошо знакомый нам пример ударной волны — взрывной звук, который слышен, когда реактивный самолет проходит звуковой барьер. Более идиллический пример — шелчок пастушьего кнута.

Ударные волны были открыты Риманом в 1860 г. Он, однако, сомневался в возможности их наблюдения, в то время как Рассел уже заметил, что скорость распространения звука от пушечного выстрела больше, чем обычно измеряемая скорость звука в воздухе («звук пушечного выстрела доносится быстрее, чем команда открыть огонь»). Здесь Рассел действительно подметил одно из важных свойств ударной волны.

Например, скорость движения бора равна $v_b = \sqrt{gh_1(h_0 + h_1)/2h_0}$.

Так как $h_1 > h_0$, то $v_B > v_1 = \sqrt{gh_1} > v_0 = \sqrt{gh_0}$, и бор бежит быстрее, чем любая небольшая волна на поверхности воды с глубинами h_0 или h_1 . Увеличение крутизны фронта волны и ее опрокидывание превращает гигантский, но безвредный океанский солитон в страшное стихийное бедствие — цунами.

Посмотрим теперь, как дисперсия вместе с нелинейностью приводят к образованию солитона. Наш первоначальный горбик (кривая 1, рис. 7.4) можно представить в виде суммы гармоник. Длина волны основной гармоник примерно равна удвоенной ширине горбика. Длины волн высших гармоник, сложение которых с основной приводит к образованию горбика конечной ширины, больше длины основной, а значит, они бегут вперед с большей скоростью. В результате увеличение крутизны переднего фронта, вызванное нелинейностью, смягчается, а при определенной форме и скорости горбика может полностью скомпенсироваться этим эффектом. Тогда-то и получается солитон. Если первоначальный горбик достаточно высокий, то он сначала может распасться на несколько горбиков, которые породят несколько солитонов. Если он очень низкий, то он просто расплывется вследствие дисперсии.

Соотношение между эффектами дисперсии и нелинейности можно выразить с помощью простой формулы. Прежде чем написать ее, посмотрим на точное решение КдФ-уравнения, описывающее солитон,

$$y(t, x) = y_0 / \text{ch}^2 \left(\frac{x - vt}{l} \right). \quad (7.1)$$

Здесь $v = v_0[1 + (y_0/2h)]$, а величина l определяется из соотношения

$$S \equiv \frac{3}{4} \frac{y_0 l^2}{h^3} = 1. \quad (7.2)$$

Это условие и выражает равновесие между эффектами нелинейности и дисперсии в солитоне. Хотя параметр S был известен уже Стоксу, его значение для теории солитонов было выяснено лишь в наше время.

Происхождение условия (7.2) можно понять, если вспомнить, что нелинейность увеличивает скорость движения вершины горбика на величину порядка $v_0 y_0 / h$, а дисперсия замедляет ее движение на величину порядка $v_0 h^2 / l^2$ (напомним, что положение вершины горбика определяется основной гармоникой, длина волны которой примерно равна $4l$). Эффекты нелинейности и дисперсии компенсируются, если эти добавки к скорости примерно равны, что и приводит к условию (7.2).

Если величина параметра S заметно больше единицы, то для достаточно плавного горбика высотой y_0 и шириной $2l$

основную роль будут играть эффекты нелинейности. Он будет деформироваться и скорее всего распадется на несколько солитонов. Если $S < 1$, то преобладает дисперсия, и горбик постепенно «расплывается». При $S \approx 1$ горбик по форме близок к солитону. Если его скорость близка к скорости солитона, то он слегка деформируется и через некоторое время превратится в настоящий солитон, форма которого определяется формулой (7.1).

Для читателя, не вполне освоившегося с гиперболическими функциями, напомним, что $\operatorname{ch} x$ принимает наименьшее значение при $x = 0$, $\operatorname{ch}(0) = 1$. При возрастании $|x|$ функция $\operatorname{ch} x$ монотонно возрастает, так что $\operatorname{ch}^2(1) \approx 2,4$. Таким образом, вершина солитона расположена в точке $x = vt$, а величину $2l$ можно считать его «шириной», на которой в основном сосредоточена переносимая им энергия. Часть солитона, расположенную на большом расстоянии от центра, иногда называют «хвостом» солитона. Центральную часть естественно называть «головой». В «голове» сосредоточено почти 90% жидкости, поднятой солитоном над поверхностью.

В ч. I мы привели выражение для скорости солитона Рассела $v = \sqrt{g(y_0 + h)}$, на первый взгляд не совпадающее с полученным для точного решения КдФ-уравнения. На самом деле величина скорости солитона $v = \sqrt{gh[1 + (y_0/2h)]}$ не противоречит формуле Рассела. Нужно вспомнить только о сделанном предположении, что амплитуда y_0 мала. Поэтому y_0/h малая величина и

$$\sqrt{g(y_0 + h)} = \sqrt{gh\left(1 + \frac{y_0}{h}\right)} = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{y_0}{2h}\right).$$

Вернемся теперь к численному эксперименту Забуски и Крускала с КдФ-уравнением. Приступая к нему, они уже были хорошо знакомы с солитонными решениями (7.1) и с нелинейными периодическими волнами. Однако они довольно плохо представляли, как могут образовываться солитоны, и совершенно не знали, что произойдет, если солитоны столкнутся. Считалось, что солитоны либо распадутся при таком соударении, либо, в крайнем случае, могут образовать новый солитон, испустив некоторое количество нелинейных волн. Они поставили задачу примерно так же, как и Ферми, Паста и Улам. Задавали некоторое простое начальное возмущение поверхности воды $y(0, x)$ и наблюдали, что с ним происходило с течением времени (на самом деле они изучали волны не в воде, а в плазме, но это совершенно несущественно, коль скоро использовалось одно и то же уравнение КдФ). Для того

чтобы ЭВМ могла справиться с задачей, нужно, конечно, изучать этот процесс не на всей бесконечной оси Ox , а на некотором конечном участке $0 \leq x \leq L$. Чтобы не думать о том, что происходит на границе, проще всего замкнуть этот отрезок, т.е. решать задачу на окружности.

Проследим за эволюцией простой гармонической волны $y(0, x) = \cos(2\pi x/L)$, рассчитанной ЭВМ. Начальная форма поверхности изображена на рис. 7.6 штрихпунктирной линией.

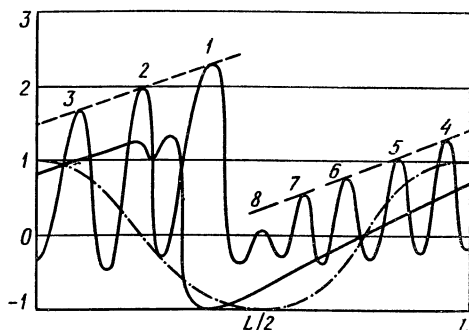


Рис. 7.6

Через некоторое время T эффекты нелинейности приводят к тому, что образуется характерная ступенька (штриховая линия). Спустя время $2,5 T$ эта ступенька порождает последовательность солитонов (сплошная линия), которые перенумерованы в порядке убывания их амплитуд. Все они движутся направо, причем солитон, пересекающий правую границу, тут же появляется слева: вспомним, что они движутся по окружности, и точки $x = 0$, $x = L$ соответствуют одной и той же точке этой окружности (как «концы» экватора на карте земного шара). Первый солитон движется быстрее всех остальных. Он догоняет их и последовательно сталкивается с ними.

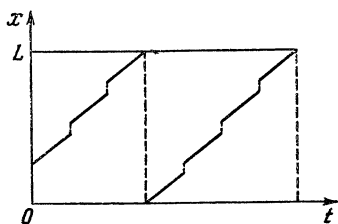


Рис. 7.7

Примерный график движения его вершины изображен на рис. 7.7. Ступеньки соответствуют столкновениям с другими солитонами. Видно, что после столкновения он сохраняет скорость, но как бы ускоряется в самый момент столкновения. Это явление было объяснено в гл. 2 по аналогии со столкновением упругих мячей.

Все эти результаты, полученные ЭВМ, удивили не только авторов работы, но и всех, кто с ними познакомился. Особенно большое впечатление произвел сделанный ЭВМ кинофильм, в котором можно было увидеть, как рождаются солитоны, как они сталкиваются друг с другом и что при этом с ними происходит. Этот первый кинофильм из жизни солитонов был черно-белый и неозвученный. С тех пор было снято много таких фильмов, в том числе цветных и звуковых. Если бы удалось устроить фестиваль фильмов о солитонах, то на нем можно было бы, вероятно, узнать о солитонах больше, чем из нескольких книг, подобных этой. В недалеком будущем с развитием и удешевлением ЭВМ и видеозаписи изготовление видеофильмов во многих случаях заменит писание статей и книг. Но пока продолжим наше повествование в надежде, что заинтересованный читатель в конце концов сумеет посмотреть такие фильмы или даже сделать их самостоятельно...

На самом деле, наш рассказ подходит к естественному концу. После основополагающих работ 1965—1967 гг. усилиями многих физиков и математиков СССР, США, Японии и других стран была разработана математическая теория солитонов, составившая новый раздел математической физики*). Невозможно рассказывать о дальнейшей истории солитонов, не касаясь идей и результатов этой теории. В то же время рассказать о ней, пользуясь тем скудным математическим языком, которым мы здесь ограничены, тоже невозможно.

Также обречена была бы на неудачу попытка описать все найденные за последние двадцать лет физические приложения идеи солитона. Трудно назвать область современной физики, в которой сегодня не изучались бы солитоны и солитоноподобные объекты. Поэтому простая экскурсия по «зоологическому саду» физических солитонов неизбежно превратится в долгое и нелегкое путешествие по всей современной физике.

Итак, «о том, что очень близко, мы лучше умолчим». Однако ставить точку пока рано! Нам еще нужно проследить за судьбой еще нескольких идей, зародившихся в прошлом веке, и описанных в гл. 3. Попутно, конечно, мы познакомимся с несколькими новыми применениями солитонов, однако это

*) Кроме упоминавшихся выше ученых, основной вклад в разработку этой теории внесли В. Е. Захаров, С. П. Новиков, Л. Д. Фаддеев, А. Б. Шабат, П. Лакс, М. Абловиц и др. С основными идеями теории солитонов и ее приложениями подготовленный читатель может познакомиться по книге: Солитоны в действии. Перевод с англ./Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. — М.: Мир, 1981.

будет лишь беглое знакомство, не ждите от него многого. Оно будет похоже на быструю автомобильную экскурсию по Москве: «Справа мы видим здание Большого театра, построенное в 1824 г. по проекту Бове и Михайлова, слева — здание Малого театра и памятник Островскому работы Андреева, впереди гостиница «Метрополь» с керамическим панно «Принцесса Греза» по рисунку Врубеля...». Примерно в таком стиле будет и наш рассказ...

Сначала, однако, завершим наш рассказ о численном эксперименте Ферми, Пасты и Улама. На самом деле Ферми, Пасте и Уламу просто «повезло». Если бы они смогли проследить за судьбой своей цепочки достаточно долго, они увидели бы, что возвращение к начальному состоянию постепенно становится все менее и менее точным и в конце концов устанавливается хаос.

Другое дело — описываемая КдФ-уравнением «струна» Забуски и Крускала. В ней возвращение должно наблюдаться в принципе неограниченно долго. Оговорка «в принципе» связана с тем, что в реальном численном эксперименте происходит накопление ошибок и возвращение тоже перестает быть точным. Если бы вычисления производились абсолютно точно, то мы увидели бы, что солитоны, изображенные на рис. 7.6, много раз столкнувшись, в конце концов снова собрались бы в синусоидальную волну. После этого все началось бы сначала!

Физические системы, которые рано или поздно возвращаются в начальное состояние, называют *интегрируемыми*. К ним относятся все системы, в которых существуют настоящие солитоны. Простейший пример интегрируемой системы — маятник. Однако если есть трение, то свойство интегрируемости теряется и маятник не возвращается в начальное состояние. Если трение очень мало, то маятник с хорошим приближением можно считать интегрируемой системой и он возвращается в первоначальное состояние достаточно много раз. Точно так же цепочка Ферми — Пасты — Улама интегрируема лишь приближенно, даже если пренебречь трением и вычислительными ошибками. Существуют, однако, и точно интегрируемые цепочки атомов. В 1967 г. японский физик М. Тода показал, что если сила, действующая на атом со стороны его соседей, равна

$$a[e^{-b(x_n - x_{n-1})} - e^{-b(x_{n-1} - x_n)}],$$

то цепочка будет интегрируемой и в ней существуют солитоны, совершенно подобные солитонам КдФ.

Но отправимся в нашу беглую экскурсию!

Океанские солитоны: цунами *), «девятый вал»

А волны в злобе постоянной бегут к побережью моему.

А Фет

28 декабря 1908 г. на юге Италии произошло землетрясение, в результате которого погибло 82 тыс. человек. Страшные разрушения были вызваны также поднятой им гигантской волной, которая была описана М. Горьким: «...Поднялась к небу волна высоты неизмеримой, закрыла грудью половину неба и, качая белым хребтом, согнулась, переломилась, упала на берег и страшной тяжестью своею... смыла весь берег». Горький описал здесь цунами. Японское слово «цунами» обозначает просто «большую волну в гавани». Цунами чаще всего образуется, когда достаточно крупный, но безвредный в открытом океане солитон выбрасывается на берег. Не все цунами вызваны солитонами, но, по мнению специалистов, большинство цунами — солитонного происхождения.

Чаще всего солитон в открытом океане образуется при землетрясении океанского дна. Длина его может достигать 500 км, но даже для относительно короткого солитона длиной 10 км океан можно считать мелким. Высота солитона в океане обычно невелика, не больше 10 м, и такую плавную волну трудно даже заметить. Среднюю скорость солитона вдали от берега легко вычислить по формуле $v = \sqrt{gh}$. При $h \approx 1$ км получаем $v \approx 100$ м/с. При изменении рельефа дна эта скорость меняется в пределах от 50 до 700 км/ч. При подходе к берегу солитон замедляет движение, становится короче и выше.

Чтобы это увидеть, достаточно вспомнить соотношение (7.2) и учесть, что энергия солитона остается постоянной. Так как энергия солитона пропорциональна $y_0^2 l$, то условие ее постоянства удобно выразить, введя еще один параметр L с размерностью длины: $L^3 = y_0^2 l$. Из (7.2) при $S \approx 1$ из этого соотношения легко найти, что $y_0 \approx L^2/h$, а $l \approx h^2/L$. Для океанских солитонов значение L обычно равно нескольким десяткам метров. Эти простые соотношения, конечно, пригодны, пока $L < h$. При $L \sim h$ высота солитона y_0 сравнивается с глубиной h , и нелинейность уже нельзя считать малой. Начинаются нелинейные процессы обрушивания волны, последняя стадия которых и описана Горьким.

*) Основные сведения о цунами заимствованы из книги: Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами. — Горький: ИПФ АН СССР, 1982.

Больше всех страдают от цунами, вызванных землетрясениями, Япония и Чили. Одно из самых сильных цунами обрушилось на Японию в 1896 г. Высота волны, обрушившейся на берег, достигала 30 м, погибло около 30 тыс. человек. Среди тех, кто читал о леденящих душу подробностях этого бедствия, наверняка были и немногочисленные читатели недавно полученного номера журнала со статьей Кортвега и де Фриза. Никому из них, однако, не пришла в голову мысль, что прочитанная ими сугубо математическая работа имеет самое прямое отношение к беде, постигшей жителей Японии. Солитонная теория цунами возникла лишь три четверти века спустя.

Самые важные проблемы, которые изучаются сегодня теорией цунами, — это условия образования начальной волны и ее эволюция при подходе к берегу. Движение солитона в океане можно довольно неплохо рассчитать с помощью общей теории, но условия его рождения и его разрушительное действие очень сильно зависят от местных условий. Один и тот же солитон будет вести себя совершенно по-разному на открытом пологом берегу, в гавани или в устье реки (в последнем случае цунами часто порождает бор). Рождение солитона также может быть вызвано разными причинами — землетрясением, взрывом вулкана или «искусственным» взрывом в воде, обвалом или оползнем берега... Например, взрыв вулкана Кракатау в 1883 г. привел к образованию на берегах Индонезии цунами с высотой до 45 м. Жертвами этой катастрофы стали 36 тыс. человек. Специалисты считают, что энергия этого взрыва была равна энергии взрыва сотен тысяч атомных бомб, подобных сброшенной на Хиросиму... Между прочим, существует гипотеза, что цунами, вызванное взрывом вулкана в Эгейском море, погубило 3,5 тыс. лет назад легендарную Атлантиду.

Ясно, что для предсказания цунами и оценки их разрушительной силы нужно выполнить еще много экспериментов на лабораторных моделях и расчетов на ЭВМ математических моделей цунами. Этим занимаются многие коллективы ученых, особенно в странах, которым угрожает это бедствие (в нашей стране цунами иногда «посещает» Камчатку и Курильские острова). В недалеком будущем, когда расчеты цунами смогут делать самые мощные и самые быстродействующие ЭВМ («суперкомпьютеры»), бедственные последствия набегов солитонов можно будет свести к минимуму.

Между прочим, известны случаи, когда «микроцунами» возникали от движения корабля. В начале века, когда стали появляться быстроходные военные суда, их капитаны время от времени сталкивались со «спутной волной», которая обра-

зуется при движении судна со скоростью, близкой к \sqrt{gh} . Оторвавшаяся от судна спутная волна и солитон Рассела — это одно и то же. Отличие лишь в том, что в мелком канале спутная волна возникает при небольшой скорости движения *). Если судно, образовавшее спутную волну, внезапно замедлит ход или если глубина внезапно изменится, спутная волна оторвется от судна и, отправившись в самостоятельное путешествие, может наделать бед. Один такой несчастный случай, произошедший в 1912 г. в Финском заливе, расследовал академик А. Н. Крылов. Он подробно описал его в своих интереснейших воспоминаниях. К сожалению, Крылов не знал о работах Рассела и Кортвега и де Фриза; подробно изучив это явление, он ограничился лишь выработкой практических рекомендаций для капитанов.

В океане рождаются и путешествуют самые разные солитоны. Безгранично разнообразный и сложный океан — естественная «среда обитания» для них. Некоторые океанские солитоны неплохо изучены, о существовании иных мы, может быть, пока и не подозреваем. Волны и солитоны могут возникать не только на поверхности воды, но и в глубине. Океанские глубины очень неоднородны, в них существуют слои воды с разной температурой, плотностью, соленостью. Зачастую граница между этими слоями оказывается довольно резкой. Она, как говорят, образует поверхность раздела. По такой поверхности, как и по поверхности раздела воды и воздуха, тоже путешествуют волны и солитоны, которые могут оказаться довольно опасными. Не исключено, что подобные солитоны ответственны за случаи загадочных аварий подводных лодок.

Ты волна моя морская,
Своейравная волна,
Как, покоясь иль играя,
Чудной жизни ты полна.

Ф. Тютчев

Перейдем теперь к солитону, который был на глазах у людей с незапамятных времен, но в науку проник совсем недавно. Речь идет о *группах* («*стаях*») волн, вызванных

*) Рассел приписывает первое наблюдение отрыва баржи от спутной волны при увеличении скорости и вызванное этим уменьшение сопротивления движению баржи «Уильяму Хаустону, эсквайру», который, однако, осознал лишь «коммерческое значение этого факта для компании канала, с которой он был связан». Научное значение этого явления первым понял Рассел.

ветром на глубокой воде (рис. 7.8). Нельзя сказать, что ученые совсем не пытались выяснить, почему волны собираются в такие стаи, но к реальному ответу на этот вопрос удалось приблизиться лишь после того, как в 1967 г. Т. Бенжамен и Дж. Фейр показали теоретическими расчетами и опытами, что простая

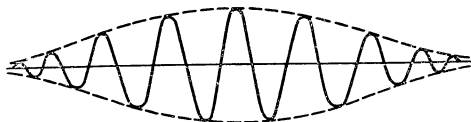


Рис. 7.8

периодическая волна на глубокой воде неустойчива. Иными словами, она склонна разбиваться на группы волн. Уравнения, описывающие такие группы, в следующем году нашел В. Е. Захаров, а вскоре было доказано, что они обладают всеми свойствами настоящих солитонов. Эти солитоны составляют новую разновидность, с которой мы еще не встречались. Они внешне похожи на модулированные радиоволны или оптические импульсы. Однако электромагнитные группы волн могут распространяться в пустоте без искажений, а группы волн на глубокой воде очень быстро расплылись бы из-за сильной дисперсии ($v = \sqrt{g\lambda/2\pi}$), если бы этому не препятствовала нелинейность.

И эти солитоны имеют непростую историю. Физики сталкивались с такими солитонами в нелинейной оптике, а уравнения, описывающие их, еще раньше изучались в теориях сверхтекучести и сверхпроводимости.

Солитон, изображенный на рис. 7.8, обычно называют «солитон огибающей», мы будем также называть его «групповым» солитоном. Название это напоминает о том, что привычную солитонную форму имеет штриховая линия, огибающая верхушки волн. Сами эти волны движутся с иной скоростью, чем их огибающая, так что под ней идет бурная жизнь. Волны, на которых «сидит» солитон, приблизительно монохроматичны. Форма огибающей описывается выражением

$$y(t, x) = y_0 / \operatorname{ch} \left(\frac{x - vt}{l} \right),$$

причем размер солитона $2l$ определяется его амплитудой y_0 , а скорость v от амплитуды не зависит. Этим «групповые» солитоны существенно отличаются от солитонов Рассела — КдФ, а в остальном они весьма сходны. Обычно под огибающей может спрятаться не более 14–20 волн, причем средняя — самая

высокая. Это и объясняет давно известное морякам правило, что самая высокая волна в группе седьмая — десятая (отсюда и «девятый вал»). Солитоны с большим числом гребней несущей волны неустойчивы и распадаются на меньшие.

На этом мы и закончим знакомство с океанскими волнами и солитонами. То, что было рассказано, разумеется, лишь карикатура, но эта карикатура позволила нам разглядеть очень важные и простые явления. Волны в реальном океане гораздо более сложны, многообразны и хаотичны*).

Передо мною волны моря.
Их много. Им немислим счет
Волна подаст свой голос в хоре
И новой очереди ждет.

Б. Пастернак

Нам хотелось бы рассказать еще о нескольких солитонах, но сначала подведем предварительные итоги, вспомним самые главные свойства истинных солитонов.

Три солитона

В «клубе многоликих солитонов», многие из которых уже успели стать знаменитыми, выделяются три наиболее важных типа настоящих солитонов. Это солитоны КдФ, ФК и «групповые». Они замечательны своими математическими свойствами, поддаются точному и строгому математическому описанию и имеют наибольшее число физических воплощений. Между ними много общего, но есть и существенные отличия.

Солитоны Рассела — КдФ рождаются в физических системах, в которых волны слабо нелинейны и слабо диспергируют. Если первоначальный импульс распался на некоторое число солитонов, то все они бегут в одном и том же направлении со скоростями, пропорциональными их высотам, а ширина каждого солитона обратно пропорциональна квадратному корню из его высоты. При столкновениях солитоны обмениваются энергией подобно упругим мячам.

Отвлекаясь от несущественных деталей, можно сказать, что примерно так же ведут себя и другие истинные солитоны. Солитон огибающей — это плавно модулированная монохроматическая волна в слабо нелинейных и сильно диспергирующих средах. Его ширина обратно пропорциональна амплитуде,

*) О реальных морских волнах можно прочесть в популярной книге: *Кадомицев Б. Б., Рыдник В. И.* Волны вокруг нас. — М.: Знание, 1981.

но скорость от амплитуды не зависит. Форма КдФ-солитона и его скорость определяются условиями компенсации эффектов нелинейности и дисперсии. Для «группового» солитона о такой компенсации можно говорить лишь условно, во всяком случае наглядно все это довольно трудно представить. На самом деле групповой солитон — очень сложный, необычный и непривычный объект, и на качественном физическом языке его поведение пока до конца не понято.

В некоторых случаях КдФ-солитоны и групповые солитоны можно считать частицами, которые подчиняются обычным законам движения ньютоновой механики. Так можно поступать, если одиночный солитон движется в слабо неоднородной среде, в которой эффекты затухания, вызванного трением, достаточно малы. При столкновениях с другими солитонами или с резкими неоднородностями среды становится существенным внутреннее устройство солитона. Даже при столкновениях с малой неоднородностью среды (например, с небольшим местным изменением глубины дна) солитон не только ускоряется или замедляется, но и слегка деформируется. Однако, проскочив неоднородность, он восстанавливает прежнюю форму и скорость, так что его движение можно приближенно описать как движение частицы, встретившей на своем пути слабо притягивающий или отталкивающий центр.

Более существенное воздействие оказывает на эти солитоны трение. КдФ-солитон под действием трения постепенно замедляет движение, одновременно уменьшая высоту и расплываясь. Эта деградация солитона происходит по экспоненциальному закону — скорость и амплитуда убывают пропорционально $\exp(-t/\tau)$, а ширина растет пропорционально $\exp(t/2\tau)$. Время распада (или время жизни) солитона τ обратно пропорционально силе трения. При малом трении солитон хотя и деформируется, но достаточно долго остается солитоном. При большом трении само понятие солитона теряет смысл. Столь же брэнно существование группового солитона. Правда, в первом приближении его скорость остается неизменной, но амплитуда убывает как $\exp(-t/\tau)$, а ширина растет как $\exp(t/\tau)$.

Таким образом, как солитоны Рассела, так и «групповые» солитоны затухают со временем. Тем более поражает удивительная устойчивость, почти «нетленность» третьего солитона. Солитон Френкеля — Конторовой (или ФК-солитон) под действием небольшого трения лишь замедляется и в конце концов остановится. Остановившись, он может жить практически «вечно». Например, дислокация будет существовать, пока существует и неизменен кристалл.

ФК-солитон — наиболее «нелинейный» из трех солитонов, причем нелинейность в его уравнении особая ($\sin \varphi$), и как раз особым характером этой нелинейности объясняется исключительная устойчивость ФК-солитона. Как мы обнаружили в предыдущей главе, эта устойчивость имеет топологическую природу; по этой причине ФК-солитон и называют топологическим солитоном.

Если в уравнении ФК (6.11) заменить $\sin \varphi$ на $-2(\varphi - \varphi^3)$, то можно получить уединенные волны, очень похожие на ФК-солитоны:

$$\varphi = \pm \operatorname{th} \left(\frac{x - vt}{l_0 \sqrt{1 - v^2/v_0^2}} \right).$$

Они, однако, не обладают свойствами истинного солитона. Будучи топологически устойчивыми, они при столкновениях друг с другом все же не сохраняют индивидуальности и могут разрушиться, передав свою энергию периодическим нелинейным волнам. Если вместо $\sin \varphi$ в уравнении ФК взять $2(\varphi - \varphi^3)$, то получившееся уравнение описывает уединенные волны типа КдФ, которые также не имеют свойств настоящих солитонов. Из этого не следует, что такие солитоноподобные объекты не интересны для физики. Наоборот, эти ближайшие родственники солитонов также приняты в солитонный клуб, и их очень внимательно изучают.

Клуб солитонов непрерывно пополняется новыми членами, и в их многоликой толпе сегодня трудно ориентироваться даже специалистам. Выручают лишь тесные родственные связи между солитонами разных типов. Даже столь несхожие три главных солитона при ближайшем знакомстве оказываются «родственниками по математической линии». Их родственные отношения скрыты за довольно сложной и глубокой математикой, но догадаться об их существовании можно хотя бы по тому, что их «профили» очень похожи. Форма всех трех солитонов определяется одной и той же функцией — гиперболическим косинусом (для ФК-солитона это, на первый взгляд, неверно, но нужно вспомнить, что производная его профиля $\varphi(t, x)$ по координате действительно обратно пропорциональна гиперболическому косинусу). Более завуалирована связь между бризерами и групповыми солитонами. Оказывается, что бризер с малой амплитудой подчиняется такому же уравнению, как и группа волн на глубокой воде.

Еще более эффектно эта связь проявляется в явлении *самонаведенной прозрачности*, связанном с существованием оптических солитонов. Поглощение света в веществе обычно обусловлено возбуждением атомов вещества световой волной.

При этом электроны перебрасываются из состояния с энергией E_0 в состояние с более высокой энергией E_1 . Если частота света ν такова, что энергия фотонов $h\nu$ близка к разности $E_1 - E_0$, то поглощение будет особенно сильным (резонансное поглощение). Для упрощения представим себе, что у атомов есть только два таких уровня. Это, конечно, карикатура, но суть явления она передает правильно.

Будем теперь пропускать через вещество короткие импульсы длительностью, скажем, $\sim 10^{-10}$ с и с несущей частотой $\sim 10^{15}$ Гц (эта частота как раз и соответствует условию резонанса). Оказывается, что при достаточно большой амплитуде импульсов среда внезапно становится прозрачной для них! Что происходит? Приблизительно вот что. Передний фронт импульса перебрасывает электроны на верхний уровень и ослабляется, а задний фронт возвращает их в прежнее состояние, причем возникающее при этом излучение возвращается импульсу. В то же время скорость импульса и его форма «подстраиваются» так, что все эти процессы происходят совершенно синхронно (рис. 7.9). Оказывается, что форму импульса можно найти, решив уравнение, по существу совпадающее с уравнением ФК, хотя этот импульс представляет

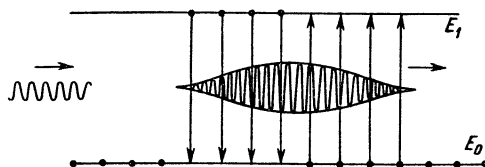


Рис. 7.9

собой типичный групповой солитон (модулированная волна). В частности, его скорость и ширина зависят от амплитуды.

Естественно использовать эти солитоны для передачи информации по оптическим волокнам. Выгоды такого способа — большая скорость передачи очень большого количества информации (за счет малой длительности импульса), малый расход энергии и высокая надежность. В недалеком будущем нам с вами, вероятно, представится возможность пользоваться таким «солитонным телеграфом»!

Нервный импульс — «элементарная частица» мысли

Основные идеи о том, как образуется и как распространяется импульс электрического напряжения по нервным волокнам, были высказаны уже в начале нашего

века. Они, однако, не были достаточно подкреплены опытами на живых нервных волокнах. Одна из основных причин этого состояла в том, что диаметр волокон очень мал: у млекопитающих — не больше 20 мкм, у лягушки самые толстые волокна имеют толщину 50 мкм.

Настоящее изучение структуры нервных волокон и распространения по ним электрических импульсов началось только с 1936 г., когда были найдены гигантские нервные волокна у кальмаров и каракатиц. Диаметр волокон у этих необычных существ доходит до 1 мм, и это уникальное свойство их нервной системы сослужило большую службу науке.

Скорость распространения нервного импульса с увеличением толщины d центральной части волокна увеличивается. Однако это увеличение — очень медленное, примерно пропорциональное $\sqrt[4]{d}$. Чтобы выжить в тяжелых условиях, надо, чтобы сигнал опасности передавался по соответствующему нерву как можно быстрее. Простейший способ — увеличение толщины волокон. По-видимому, каракатицы в процессе эволюции выжили вследствие того, что как-то сумели в десятки раз увеличить толщину этого жизненно важного нерва. Однако эволюция «изобрела» еще и другой, более совершенный способ увеличения скорости нервного импульса, который и был «принят на вооружение» остальными животными. У высших животных, а также и у нас с вами многие нервные волокна заключены в изолирующую оболочку. Это дает тот же эффект, что и увеличение толщины. Скорость импульса в толстом нервном волокне каракатицы равна 25 м/с, а в волокнах млекопитающих, которые в 50 раз тоньше, она может достигать 100 м/с.

Итак, благодаря тому, что каракатицы выжили в процессе эволюции, к середине столетия были установлены все основные факты, необходимые для создания обоснованной теории прохождения импульса по нервному волокну. В 1952 г. английские физиологи А. Ходжкин и А. Хаксли в серии блестящих работ построили теорию, которая получила общее признание (в 1963 г. им была присуждена Нобелевская премия по медицине). Детали устройства нервного волокна и подробности теории для нас несущественны. Познакомимся лишь с самыми главными фактами и идеями.

На многочисленных опытах было твердо установлено, что форма и скорость импульса не зависят от величины раздражения нерва. Если раздражение очень сильное, то выпускается подряд целая «очередь», или «залп», импульсов. Если оно очень

слабое, то импульс по нерву вообще не пойдет, минимальная сила раздражения называется «пороговой». Все это очень напоминает распад большого горба на поверхности воды на солитоны. Разница только в том, что импульсы нервного возбуждения совершенно одинаковы и распространяются друг за другом с одинаковой скоростью. Простота и целесообразность такого устройства передачи информации по живому организму, конечно, изумительны. Каждый импульс переносит одну единицу информации, и «приемным устройствам», о которых мы не будем здесь говорить, достаточно только считать, сколько таких «элементарных частиц» информации поступило и за какое время.

Как же действует этот удивительный механизм, превращающий беспорядочные и многообразные раздражения, поступающие из внешнего мира, в стройные последовательности строго одинаковых уединенных волн? Нервный импульс распространяется совсем не так, как электрический ток по проводам. Нервное волокно слишком плохой проводник! «Тонкое нервное волокно длиной 1 м имеет примерно такое же электрическое сопротивление, как медная проволока 22-го калибра при длине $1,6 \cdot 10^{10}$ км, что почти в 10 раз больше расстояния между Землей и Сатурном. Инженер-электрик был бы в большом затруднении, если бы его попросили установить связь в Солнечной системе, используя обычный кабель» (А. Ходжкин).

Простейшее волокно состоит из сердцевины, заключенной в оболочку (мембрану) и погруженной в наружную плазму (рис. 7.10). Внутренняя и наружная плазмы сильно отличаются по составу. Снаружи плазма содержит избыток ионов натрия (Na^+) и хлора (Cl^-), образовавшихся при диссоциации обычной поваренной соли NaCl . Внутри больше ионов калия (K^+) и отрицательно заряженных ионов органических молекул. Мембрана проницаема для ионов Na^+ , K^+ и Cl^- , но не пропускает большие органические молекулы. В спокойном состоянии все процессы проникновения ионов через мембрану уравновешены так, что внутренняя часть волокна

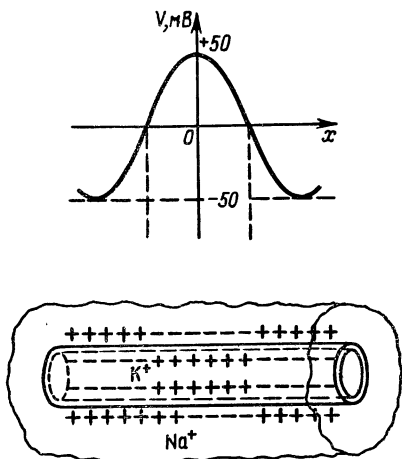


Рис. 7.10

содержит избыток отрицательных ионов, и электрическое напряжение между внутренней и внешней плазмами равно примерно 50 мВ. При раздражении нерва достаточно большим внешним импульсом мембрана начинает пропускать внутрь ионы Na^+ , и в месте раздражения напряжение быстро меняется на противоположное. В этот процесс вовлекаются соседние участки мембраны, так что начинает распространяться импульс напряжения, изображенный в верхней части рис. 7.10. После прохождения импульса быстро восстанавливается прежнее спокойное состояние. Таким образом, по нервному волокну распространяется не электрический ток, а некоторая электрохимическая реакция, которая и порождает бегущий импульс напряжения.

Импульс может образоваться и распространяться только потому, что в этом устройстве существует нелинейный элемент, который подавляет малые отклонения от нормального состояния и усиливает большие. Если бы не было никаких

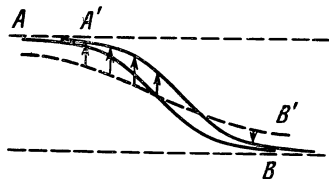


Рис. 7.11

нелинейных эффектов, то передний фронт импульса (AB на рис. 7.11) начал бы расплываться, подобно тому как расплывается чернильная капля в воде. Оба эти процесса имеют аналогичную природу и описываются одним и тем же уравнением диффузии (от лат. *diffundo* —

рассеивать). В случае нервного импульса основной процесс — это диффузия ионов через мембрану. Если равновесие нарушено, то диффузия быстро выравнивает концентрации. При этом фронт импульса становится все более пологим, высота его уменьшается, и он в конце концов исчезает. Нелинейная зависимость проницаемости мембраны от величины импульса приводит к тому, что более высокая часть импульса поднимается, а более низкая опускается (стрелки на рис. 7.13). Если нелинейность полностью уравнивает диффузию, фронт импульса может просто сдвинуться вперед, не изменяя формы ($A'B'$). Так образуется уединенная волна нервного импульса.

В реальном нерве для поддержания движения импульса необходимо все время добавлять немного энергии, но эта энергия очень мала, «утомить» нерв довольно трудно. Важно, что из-за «самоорганизованности» импульса эти добавки не искажают форму и не изменяют скорость импульса (в точности как в часах, где передача энергии маятнику от пружины не изменяет период колебаний).

У нелинейной диффузии тоже есть своя интересная история. В 1937 г. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов опубликовали замечательную математическую работу (между прочим, также связанную с биологической проблемой). Они показали, что нелинейность может уравновесить диффузию и что в результате может появиться бегущая уединенная волна с постоянной скоростью и формой. По сути дела, была открыта и изучена простейшая математическая модель нервного импульса, но, к сожалению, никто этого не понял. Нельзя сказать, что эта работа вообще не была замечена. Год спустя Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий применили ее результаты к теории горения (вспомните свечу и бикфордов шнур!), но настоящее понимание уединенной волны нелинейной диффузии пришло лишь двадцать-тридцать лет спустя.

Как ни жаль, но придется на этом остановиться. Изучением элементарной «частицы мысли» сегодня занимаются биологи, физики, математики, химики, инженеры... Инженеры? Да, не удивляйтесь, инженерам-электрикам, о которых говорил Ходжкин, это тоже интересно! Были придуманы разные электрические модели нервного волокна, и они, вероятно, пригодятся если не для установления связи в Солнечной системе, так для чего-нибудь еще, скажем, для ЭВМ... В общем, работа идет большая, и конца ей пока не видно. Выяснение природы импульса — это, разумеется, только начало, да и здесь далеко не все понятно. А дальше надо разбираться, как он принимается, как преобразуется в действия мышц*) или в другие импульсы, как, в конце концов, эти «частицы мысли» связаны с нашими действительными чувствами и мыслями... Современная наука уже начинает подбирать ключи к ответам на эти вопросы. А началось все с уединенной волны!

Вездесущие вихри

Но живут, живут в N измерениях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем
С нашим шагом по одной черте

В Брюсов

До сих пор мы действительно шагали по одной черте. Все солитоны и уединенные волны, с которыми мы познакомились, по сути дела, одномерны (т. е. $N = 1$!). Это, как вы помните, означает, что существенна зависимость лишь

*) Возможно, что в механизме сокращения мышц солитоны также играют важную роль. Солитонная модель этого механизма предложена А. С. Давыдовым с сотрудниками.

от одной координаты. Так, волну, набегающую на морской берег, можно приближенно считать одномерной. Волны, расходящиеся от брошенного в воду камня, двумерны, а свет электрической лампочки распространяется трехмерными электромагнитными волнами. В современной физике элементарных частиц изучают и волны в пространствах большего числа измерений. Не удивительно, что физики и математики прилагают большие усилия для обнаружения и изучения солитонов и солитоноподобных объектов в « N измерениях». Точно вычисляемых настоящих многомерных солитонов пока немного. Наиболее подробно изучены солитоны, порожденные двумерными волнами, подобными волнам КдФ. Такие волны были впервые изучены в 1970 г. Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили, а через несколько лет удалось найти два типа двумерных солитонных решений полученного ими уравнения. Одно описывает столкновение обычных «одномерных» солитонов, налетающих друг на друга под углом (более простая задача — отражение солитона на поверхности воды, набегающего под углом на стенку набережной)*). Второе соответствует действительно двумерным солитонам, которые убывают по всем направлениям от вершины (если одномерный солитон подобен горному хребту, то двумерный — это просто одинокий холмик).

Позднее были обнаружены двумерные обобщения «групповых» солитонов на поверхности воды, но наиболее интересны солитоны, связанные с вихрями. Что значит «связанные» с вихрями? Эта связь двойственна. С одной стороны, там, где есть вихри, могут возникать настоящие солитоны. С другой стороны, сами вихри и более сложные объекты, построенные из вихрей, можно рассматривать как многомерные солитоноподобные образования. Посмотрим сначала на примеры простых солитонов, образующихся на вихрях.

Вокруг вихревой воронки в ванне часто можно увидеть бегущие спиральные волны, природа которых близка к природе открытых Россом спиральных рукавов галактики (рис. 3.8). Только в этом случае средой для волн является межзвездный газ, и рукава связаны с его уплотнениями. По-видимому, эти уплотнения играют существенную роль в образовании звезд из галактического газа. Детали происходящих при этом сложных процессов пока не вполне ясны, но можно предположить, что гигантские уединенные волны плотности, близкие родственники таких знакомых и доступных спиральных волн вокруг вихря в ванне, составляют основу, подмостки, на которых разыгрывается грандиозное космическое действие рождения звезд...

*) Такое отражение солитонов впервые наблюдал и описал Рассел.

В сливное отверстие ванны
Змеистой воронкой уходит вода,
Таковыми же точно вьюнами
Бегут по земле ураганы...

Л. Мартынов

Зоркий глаз поэта не только увидел еще один солитон, живущий на вихре, но и подметил далеко идущую аналогию с атмосферными вихрями. Вы, конечно, обратили внимание на эпитет «змеистый» и сравнение с «вьюном». Они дают очень точное качественное описание волн и солитонов на ножке вихря. Нам остается только спросить: а почему волны на вихревой нити извиваются змеей, вьюном, а не распространяются как по упругой резинке?

Ответ на этот вопрос мы, в сущности, уже знаем. Точнее, нам известно, что вихревое кольцо движется перпендикулярно своей плоскости, причем скорость кольца тем больше, чем меньше его радиус. Помня об этом, можно поверить, что при изгибе вихревой нити она будет двигаться перпендикулярно к плоскости, в которой происходит изгиб, и что скорость этого движения увеличивается при увеличении изгиба. Теперь нетрудно понять, что всякий изгиб вихревой нити будет вызывать ее закручивание «вьюном», т. е. по спирали. Солитон, образуемый на вихревой нити, и есть такая спираль, можно назвать его «спиральным солитоном». Если смотреть на него сверху, вдоль первоначального направления нити, то мы увидим картину, изображенную на рис. 7.12. Это — проекция на плоскость xu ; часть нити, лежащая ниже этой плоскости, нарисована штриховой линией. Координаты спирали на плоскости xu определяются очень просто: $r = r_0 / \text{ch}(\varphi/\varphi_0)$. Координату z каждой точки кривой также найти несложно, нам достаточно знать, что z приблизительно пропорционально φ/φ_0 .

На рис. 7.12 изображена моментальная «фотография» проекции спирального солитона на плоскость xu . На самом деле солитон равномерно движется вдоль оси z , а его проекция на плоскость xu равномерно вращается. Скорость движения вдоль оси z обратно пропорциональна «амплитуде» солитона r_0 , подобно тому как скорость вихревого кольца обратно пропорциональна его диаметру. Некоторое представление о форме спирального солитона можно получить, если на телефонном шнуре сложить петельку в виде солитона Эйлера и потом растягивать

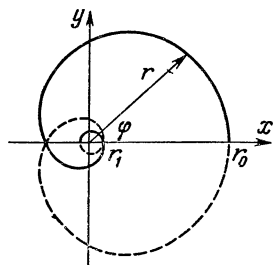


Рис. 7.12

ее, одновременно стараясь перекрутить провод. Такая кривая будет моделью лишь для центральной части солитона. Спиральный солитон в действительности все время как бы обвивается вокруг равновесного положения нити. Этот солитон можно назвать одним из самых простых воплощений группового солитона. Амплитуда самой высокой «волны» равна r_0 , амплитуда следующей — r_1 и т. д., а кривую $r(\varphi) = r_0/\text{ch}(\varphi/\varphi_0)$ можно считать «оггибающей» этих «волн».

В более крупном масштабе спиральный солитон наблюдался на смерчах (в Северной Америке, где они появляются особенно часто, их называют *торнадо*). Смерч образуется из вихря, который зарождается в глубине ливневой тучи. Один конец вихря опускается в виде «хобота», под влиянием которого закручивается вихрь на поверхности земли или воды. Все вместе образует гигантский медленно движущийся вертикальный столб. Смерч захватывает и уносит в облако разные мелкие предметы, которые потом могут выпадать вместе с дождем (известны, например, «рыбные» дожди). Хотя он сам движется медленно, внутри него воздух вращается с огромной скоростью, скорость ветра в смерче может достигать 300 км/ч! «Ножка» такого смерча часто совершает плавные спиральные колебания. Возможно, что подобные спиральные колебания, аналогичные солитонам на тонкой вихревой нити,

приводят и к самому выходу вихря из облака.

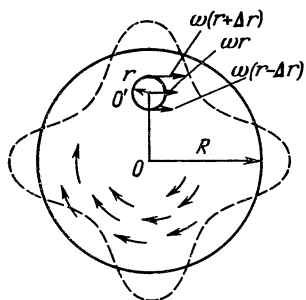


Рис. 7.13

Более безобидные, точнее, совсем безобидные солитоны образуются на границах вихревых областей. Представим себе плоское течение воды, в котором образовалась вихревая область радиуса R (рис. 7.13). Если измерить мгновенную скорость жидкости в каждой точке этой области (в системе покоя ее центра), то она будет равна ωr . Это значит, что если жидкость вдруг отвердеет, то

получившееся твердое тело будет вращаться с угловой скоростью ω , где $\omega = 2\pi/T$, а T — период вращения.

Простое рассуждение показывает, что несмотря на это, каждая капля жидкости внутри вихревой области вращается. Рассмотрим движение небольшого кружка с радиусом Δr (рис. 7.13). Центр его O' движется со скоростью ωr , самая дальняя от центра O точка — со скоростью $\omega(r + \Delta r)$, а ближайшая к центру O точка — со скоростью $\omega(r - \Delta r)$. Если мы

поместимся в точку O' , т. е. в мгновенную систему покоя кружка, то обнаружим, что кружок вращается с угловой скоростью ω . В этом смысле все точки вихревой области равноправны, и говорят, что в круге радиуса R жидкость находится в состоянии *однородного вихревого движения*.

Так вот, на границе между этой областью и остальной жидкостью, где движение безвихревое, могут существовать волны и солитоны, которые причудливым образом меняют форму вихревой области. На рис. 7.13 такое изменение границы области изображено штриховой линией. Так как солитон движется вдоль границы, то будет казаться, что вихревая область вращается. Наблюдать такие солитоны нелегко, но в численных экспериментах на ЭВМ действительно были обнаружены вращающиеся вихревые области разной формы. В общем, солитоны столь любят вихри, что можно без преувеличения сказать: взгляните в вихри попристальнее и непременно найдете солитон!

В то же время и сами вихри можно во многих случаях считать солитонами или, по крайней мере, солитоноподобными. Вспомним о паре вихрей (овале) Кельвина. Внешне он настолько похож на солитон, что естественно попытаться посмотреть, что с ними произойдет при столкновении. Для математики прошлого века эта задача была совершенно непосильной, да и в наше время с помощью карандаша и бумаги ее не решить. Пока ответ на этот вопрос был найден только в численных экспериментах. Результат схематически изображен на рис. 7.14. Большой и более быстрый вихрь 1 догоняет

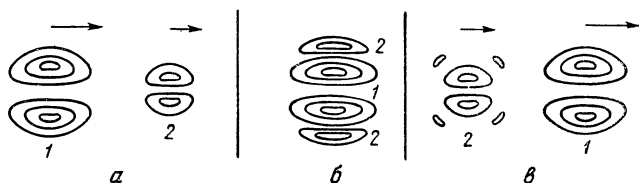


Рис. 7.14

более слабый вихрь 2 (а). При ударе он разбивает его на части (б), но они потом воссоединяются и в конечном счете выходят из столкновения почти не изменившимися (в). Слово «почти» относится к тому, что вблизи второго вихря появились дополнительные маленькие вихри. Видно, что вихревые состояния Кельвина очень похожи на настоящие солитоны, насколько похожи — покажет будущее.

К сожалению, все движения в жидкости всегда связаны с трением, и поэтому вихри в обычных жидкостях затухают, если вихревое движение не поддерживается притоком энергии извне. Существуют, однако, замечательные жидкости, в которых трение при определенных условиях исчезает! Проницательный читатель, конечно, догадался, что автор имеет в виду явления сверхтекучести и сверхпроводимости.

В 1938 г. Петр Леонидович Капица (1894—1984) обнаружил, что при температуре ниже $T_k \approx 2,19$ К вязкость жидкого гелия внезапно падает по меньшей мере в миллион раз. Он высказал смелую гипотезу, что вязкость не просто мала, но вообще отсутствует, и назвал это явление сверхтекучестью (примерно в то же время некоторые эффекты сверхтекучести жидкого гелия наблюдал также английский физик Джон Аллен). В серии замечательно остроумных опытов Капица за короткое время выяснил необычные свойства сверхтекучего гелия, которые в 1941 г. объяснил Лев Давидович Ландау (1908—1968).

По теории Ландау, гелий при температуре, меньшей T_k , состоит из смеси двух жидкостей — нормальной (вязкой, не сверхтекучей) и сверхтекучей, движущейся без трения. Если температура стремится к нулю, то вся жидкость становится сверхтекучей. Движения сверхтекучей компоненты подобны движениям идеальной жидкости Эйлера, но есть и важные отличия, вызванные тем, что явление сверхтекучести имеет квантовую природу. Чтобы подчеркнуть это, сверхтекучую жидкость называют *квантовой*.

Микроскопическая квантовая теория сверхтекучести была построена в 1947 г. Н. Н. Боголюбовым, работа которого впоследствии легла и в основу теории сверхпроводимости. Упрощенно можно себе представлять, что сверхпроводимость, т. е. исчезновение электрического сопротивления у некоторых металлов вблизи абсолютного нуля температуры, вызвана сверхтекучестью «электронной жидкости».

Читатель, желающий подробнее ознакомиться с этими замечательными явлениями, может обратиться к книге В. С. Эдельмана «Вблизи абсолютного нуля» (М.: Наука, 1983. — Библиотечка «Квант», вып. 26). Здесь мы скажем только несколько слов о вихрях, многие интересные свойства которых были открыты американским физиком Р. Фейнманом. Вихри в сверхтекучем гелии устроены примерно так же, как в идеальной жидкости Эйлера. Самое важное отличие состоит в том, что «сила» отдельного вихря квантована! Точный смысл этого утверждения состоит в следующем. Если в сверхтекучем гелии есть прямолинейная вихревая нить OO' , (рис. 7.15), т. е. вихревое движение сосредоточено внутри очень тонкой трубки, то

вне этой трубки на расстоянии r от нити скорость жидкости равна $v = \kappa/2\pi r$ *). Здесь $\kappa = nh/m_{\text{He}}$, а n — целое число (h — постоянная Планка, m_{He} — масса атома гелия). В обычной жидкости скорость вокруг вихревой нити распределена по такому же закону, но сила вихря κ может быть любой. Квантование силы вихря — одно из проявлений квантовых свойств сверхтекучих жидкостей.

Подобные вихри могут возникать и в некоторых сверхпроводниках. Так как «электронная жидкость» переносит заряд, то при ее движении возникает электрический ток, а следовательно, и магнитное поле. С вихрем в сверхпроводнике поэтому должно быть связано магнитное поле, сосредоточенное в трубке, окружающей нить OO' на рис. 7.15. Хорошо известно, однако, что магнитное поле не может проникнуть в толщу сверхпроводника, так как в идеальной жидкости сверхпроводящих электронов магнитное поле мгновенно наводит токи, которые полностью его компенсируют. Если же увеличивать магнитное поле, то при достаточно большом его значении сверхпроводимость просто разрушится. Так ведут себя классические сверхпроводники (олово, алюминий, свинец и др.), которые называют сверхпроводниками первого рода.

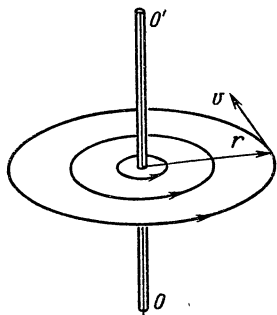


Рис. 7.15

Существуют, однако, сверхпроводники второго рода (например ниобий), которые реагируют на приложенное к ним магнитное поле иначе. Достаточно сильное магнитное поле может проникнуть в сверхпроводник второго рода, но только в виде вихревых нитей. Магнитное поле как бы «просверливает» себе отверстия в толще сверхпроводящей жидкости. Вблизи вихря, где магнитное поле максимально, остается только нормальная электронная жидкость, а в сверхпроводящей жидкости циркулируют незатухающие токи, не выпускающие поле за пределы трубки. Из-за того что электронная жидкость заряжена, вихрь в сверхпроводнике несколько отличается от вихря в жидком гелии — скорости сверхпроводящих электронов убывают при увеличении r быстрее, чем скорости сверхтекучих атомов гелия. Подобно вихрю в гелии, вихрь в сверх-

*) Там, где скорость распределена по такому закону, движение не вихревое. Это можно доказать точно так же, как мы доказали, что при $v = \omega r$ движение вихревое.

проводнике квантован: произведение среднего значения магнитного поля в трубке (H) на площадь трубки (ΔS) равно $n \cdot hc/2e$, где n — целое число, c — скорость света, e — заряд электрона. Величину $\Phi_0 = hc/2e$ называют *квантом магнитного потока*.

Необычное поведение магнитного поля в сверхпроводниках второго рода было открыто Львом Васильевичем Шубниковым (1901—1945) еще в 1937 г. Однако причины этого поведения долгое время оставались непонятными, пока в 1950 г. В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау не построили общую теорию сверхпроводников второго рода. Два года спустя А. А. Абрикосов ввел на ее основе представление о вихрях, которое показалось сначала чересчур смелым. Почти десятилетие понадобилось физикам для того, чтобы осознать, какой замечательный новый объект вошел в их науку, а многие возможности, заложенные в абрикосовских вихрях и их многочисленных «родственников», не раскрыты и до сих пор.

Внешне вихри не очень похожи на классические, настоящие солитоны. Тем не менее между ними существует глубокая родственная связь. Наиболее ярко эта связь проявляется для вихрей в так называемом *джозефсоновском переходе*. Представьте себе «сэндвич», сделанный из двух сверхпроводящих пластинок, разделенных очень тонким изолирующим слоем (толщина слоя всего 2—3 нм!). Как показал в 1962 г. английский физик Б. Джозефсон, сверхпроводящая электронная жидкость может «просачиваться» через такой тонкий слой. Этот

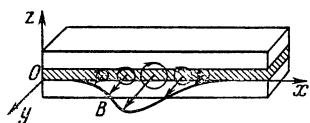


Рис. 7.16

чисто квантовый эффект *туннелирования* сверхпроводящих электронов называется *джозефсоновским туннелированием*. Благодаря ему обе пластинки составляют как бы один сверхпроводник и между ними могут циркулировать незатухающие токи, изображенные на рис. 7.16 кружочками. Связанное с этими токами магнитное поле в глубину пластинок не проникает, а сосредоточено в слое изолятора и в примыкающих к нему поверхностях пластинок на глубине до 50 нм. Как показано на рисунке, оно направлено по оси Oy *).

*) Роль нелинейной возвращающей силы здесь играет зависимость туннельного тока от распределения магнитного поля в переходе. В этом смысле изолирующий слой похож на мембрану нервного волокна. Зависимость магнитного поля от x с точностью до обозначений определяется графиком скорости φ' асимптотического движения нелинейного маятника (см. рис. 4.15).

вается, что вихревые токи вместе с «вмороженным» в них магнитным полем могут образовать настоящий солитон, математически совершенно тождественный солитону Френкеля! При этом магнитный поток, т. е. произведение среднего значения магнитного поля на пронизываемую им площадь в плоскости xz , должен быть кратным кванту магнитного потока Φ_0 , а число квантов магнитного потока в солитоне есть его солитонный заряд (вспомните о «заряде» дислокаций!). Солитоны с ненулевым зарядом будут поэтому неразрушаемыми! Конечно, с точки зрения физики, такую полную неразрушаемость можно осуществить лишь при температуре абсолютного нуля и отсутствии заметных внешних воздействий.

Какую совершенную нервную систему можно было бы сделать, используя эти солитоны в качестве элементарных частиц мысли! Размеры этих солитонов могут быть довольно невелики, меньше 0,1 мм, а время, необходимое для их образования, фантастически мало, не более 10^{-10} с. Нервная система, построенная из джозефсоновских переходов, была бы довольно компактной и действовала бы с чудовищной скоростью. Умерим, впрочем, энтузиазм. До создания подобной «нервной системы», если это вообще возможно, нужно пройти долгий и трудный путь. А пока ученые пытаются заставить джозефсоновские солитоны работать в ЭВМ. Это тоже непростая задача, но можно надеяться, что о таких ЭВМ мы с вами скоро услышим.

Для работы в ЭВМ можно приспособить и другие солитоны. Например, вихри в сверхпроводниках второго рода можно использовать в качестве ячеек памяти. Подобное применение уже нашли некоторые магнитные солитоны. В шестой главе мы познакомились с простейшими представителями этого семейства. Существуют и более сложные дву- и трехмерные магнитные солитоны, напоминающие вихри в жидкостях, только роль линий тока в них играют линии, по которым выстраиваются элементарные магнетики. Такие образования дают наглядную модель солитонов, связанных с элементарными частицами, на которые мы бросим лишь беглый взгляд.

Элементарные частицы и солитоны

Главная цель естественных наук — раскрывать единство сил Природы.

Л. Больцман

Современная наука выявила это единство на очень глубоком уровне. По нашим сегодняшним представлениям наблюдаемое вещество Вселенной состоит из фотонов, лептонов (электроны, мюоны, нейтрино) и кварков. Помимо электро-

магнитных взаимодействий, переносчиками которых служат фотоны, существуют сильные взаимодействия, связывающие кварки в барионы (протоны, нейтроны и пр.) и в мезоны, а также слабые взаимодействия, ответственные, например, за радиоактивный распад нейтрона. Все эти взаимодействия описываются единой теорией, глубоко обобщающей теорию Максвелла. Вместо векторов обычных электрического и магнитного полей E , B в ней действуют несколько подобных векторных полей E_i и B_i , волны которых по своей природе сильно нелинейны*). Эта нелинейность неизбежно приводит к тому, что солитоны должны играть существенную роль в устройстве Вселенной.

Наиболее привлекательной представляется идея, что элементарные частицы и есть солитоны или солитоноподобные объекты. Эта идея имеет богатую историю. Мы уже упоминали о вихревых атомах Кельвина. В начале нашего века предлагались более реалистические солитоноподобные модели для электрона. В 1912 г. немецкий физик Густав Ми (1868—1957) нашел замечательное обобщение теории Максвелла, в котором обычные электромагнитные волны нелинейны, а электрон появляется как солитоноподобная частица малого, но конечного размера, в которой запасена конечная электромагнитная энергия. В 1934 г. теорию Ми возродил и усовершенствовал Макс Борн (1882—1970), один из создателей квантовой теории. Теорией Борна активно интересовался Я. И. Френкель и многие другие исследователи. Теории Ми и Борна не потеряли привлекательности и в наши дни. Хотя мы и понимаем, что к реальному электрону они имеют мало отношения, их ценность в том, что они заставляют уйти с проторенных дорог и будят фантазию, которая нам так необходима при освоении «нелинейной физики».

В меньшей степени эти слова относятся и к работам, которым посвятил почти тридцать последних лет своей жизни Эйнштейн, пытавшийся объединить теорию Максвелла и свою теорию тяготения (общую теорию относительности) и найти в такой объединенной теории естественное место для электрона. Современникам казалось, что, занимаясь этими проблемами, он безнадежно отстал от науки своего времени. Теперь-то мы видим, что Эйнштейн скорее забежал вперед...

*) Первое такое обобщение теории Максвелла было сделано Ч. Янгом и Р. Миллсом в 1954 г. Все подобные теории называют поэтому теориями Янга—Миллса. Подчеркнем, что нелинейность столь же глубоко заложена в природе полей Янга—Миллса, как и в природе волн на воде.

Один из недостатков всех этих предварительных попыток «солитонизации» элементарных частиц состоял в том, что они не учитывали требований квантовой теории. Другой проистекал из скудости знаний об устройстве реального мира. Достаточно реалистические солитонные модели элементарных частиц (особенную известность получила теория В. Гейзенберга) начали появляться в 50-е годы. Однако и они не привели к серьезному успеху, хотя и дали богатую пищу воображению.

Парадоксальная и, на первый взгляд, «безумная» идея была высказана английским физиком Т. Скирмом. Он изучал нелинейные взаимодействия полей, описывающих мезоны. В отличие от упомянутых в начале обобщенных максвелловских (векторных) полей E_i, B_i , мезонные поля задаются обычными (невекторными) функциями $\phi_i(t, x)$. Изучая нелинейные взаимодействия этих полей, Скирм обнаружил, что они могут образовывать солитоны, и высказал смелую гипотезу, что их надо отождествить с наблюдаемыми нами протонами и нейтронами. Эта гипотеза противоречила всем устоявшимся представлениям о протонах и нейтронах, и должна была «отлежаться» почти двадцать лет до того, как о ней снова вспомнили. Сегодня, когда пишутся эти строки, усовершенствованная солитонная модель протона увлекает многих физиков-теоретиков.

Теория Скирма показалась безумной потому, что протон не может состоять из мезонов. Это противоречило бы сохранению момента импульса, а также сохранению барионного заряда, равного $+1$ для протона и нейтрона, и 0 для мезонов. Однако солитон нельзя считать состоящим из мезонов, точно так же, как дислокацию нельзя составить из упругих волн, бегущих по кристаллу. Кстати, барионный заряд истолковывается по Скирму как сохраняющийся солитонный заряд. К этой идее он пришел, когда до предела упростил свою модель, сделав ее одномерной. В результате получилась модель Френкеля — Конторовой, которую он исследовал, ничего не зная о работах своих предшественников.

Судьба протона, а вместе с ней судьба всей нашей Вселенной, возможно, зависят от еще одного замечательного солитона, предсказываемого единой теорией взаимодействий, с которой мы начали этот заключительный рассказ. Помимо других удивительных свойств, этот солитон несет на себе магнитный заряд, и его называют *магнитным монополем*. Хорошо известно, что теория Фарадея — Максвелла не допускает существования изолированного магнитного заряда, существуют лишь магнитные диполи. С течением времени это убеждение приобрело силу предрассудка, пробить брешь в котором удалось лишь в 1931 г. Это сделал знаменитый англий-

ский физик Поль Дирак (1902—1984), тот самый, который предсказал антиэлектроны (позитроны) и многое другое. Говоря словами его работы, «...квантовая механика в действительности не противоречит существованию магнитных полюсов. Напротив... естественным образом... неизбежно приводит к волновым уравнениям, которые имеют единственную физическую интерпретацию — движение электрона в поле изолированного магнитного полюса... С этой точки зрения было бы удивительно, если бы Природа не использовала этой возможности!»! Самое интересное следствие рассуждений Дирака состояло в том, что магнитный заряд g монополя не может быть произвольным, а должен быть равен целому кратному величины $hc/4\pi e$, где e — заряд электрона. Вспомнив определение кванта магнитного потока (который появился лишь двадцать лет спустя!), нетрудно заметить, что элементарный магнитный заряд равен $\Phi_0/2\pi$. Из рассуждений Дирака следовало также, что электрические заряды должны квантоваться, т. е. быть кратными элементарному электрическому заряду!

Очень немногие физики того времени сумели оценить эту удивительную работу. Трудность была не только в том, что магнитных зарядов никто не видел, но и в том, что поле магнитного заряда было устроено не совсем так, как поле электрического заряда. Полной симметрии между электричеством и магнетизмом не получалось. Так или иначе, в течение почти сорока лет монополь Дирака привлекал очень мало внимания физиков, повторяя судьбу солитона Рассела. Перелом произошел, когда в 1974 г. советский физик А. М. Поляков и голландский физик Г. т'Хоофт независимо показали, что в некоторых теориях Янга — Миллса существуют солитоны с магнитным зарядом. В отличие от точечного монополя Дирака, монополь Полякова — т'Хоофта имеет конечные размеры и непростое топологическое устройство. В этом смысле его можно назвать многомерным и весьма рафинированным потомком простенького солитона Френкеля. Пока ни одного монополя никому увидеть не удалось, однако сложное устройство магнитных монополей и серьезное влияние, которое их существование может оказать на судьбу всей Вселенной, привлекают к ним общее внимание.

Совсем недавно молодой советский физик В. А. Рубаков показал, что протон, приблизившийся к монополю, быстро распадается. Современные единые теории взаимодействий допускают, вообще говоря, распад протона, требующий несохранения барионного заряда, но ставят очень высокую границу для среднего времени жизни — больше 10^{30} лет. (За

1000 лет Земля могла бы потерять благодаря таким распадам примерно 6 г своей массы). Тем не менее вблизи монополя протон распался бы практически мгновенно. Наше счастье, что сейчас монополей во Вселенной мало, а может быть, и вовсе нет!

* * *

На этом кончается наше путешествие. В таких случаях обычно принято писать заключение, делать выводы, подводить итоги... В книге о солитоне делать это, по-моему, рано. Солитон еще слишком молод и открыл нам лишь малую часть своих дарований. Да и может ли быть какой-нибудь конец у истории о бесконечно разнообразном детище бесконечной и изменчивой Природы... Продолжение?... Да, продолжение истории обязательно будет! Только для этого понадобится работа молодого читателя этой книги, будущего создателя дерзких новых идей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	3
Предисловие	4
Введение	5
Часть I. ИСТОРИЯ СОЛИТОНА	13
Глава 1. 150 лет назад	14
Начало теории волн (18). Братья Веберы изучают волны (20). О пользе теории волн (21). О главных событиях эпохи (24). Наука и общество (29).	
Глава 2. Большая уединенная волна Джона Скотта Рассела	31
До роковой встречи (32). Встреча с уединенной волной (34). Этого не может быть! (36). А все-таки она существует! (38). Реабилитация уединенной волны (39). Изоляция уединенной волны (41). Волна или частица? (42).	
Глава 3. Родственники солитона	45
Герман Гельмгольц и нервный импульс (46). Дальнейшая судьба нервного импульса (49). Герман Гельмгольц и вихри (50). «Вихревые атомы» Кельвина (56). Лорд Росс и вихри в космосе (57). О линейности и нелинейности (59).	
Часть II. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	63
Глава 4. Портрет маятника	64
Уравнение маятника (64). Малые колебания маятника (66). Маятник Галилея (67). О подобии и размерностях (69). Сохранение энергии (72). Язык фазовых диаграмм (75). Фазовый портрет (82). Фазовый портрет маятника (84). Показательная и гиперболические функции (87). «Солитонное» решение уравнения маятника (89). Движения маятника и «ручной» солитон (91). Заключительные замечания (93).	
Глава 5. От маятников — к волнам и солитонам	99
Волны в цепочке связанных частиц (100). Отступление в историю. Семья Бернулли и волны (107). Волны Д'Аламбера и споры вокруг них (109). О	

дискретном и непрерывном (112). Как измерили скорость звука (115). Дисперсия волн в цепочке атомов (119). Как «услышать» разложение Фурье? (121). Несколько слов о дисперсии света (123). Дисперсия волн на воде (124). С какой скоростью бежит стая волн (128). Сколько энергии в волне (132).

Часть III. НАСТОЯЩЕЕ И БУДУЩЕЕ СОЛИТОНОВ

136

Глава 6. Солитоны Френкеля

136

Что такое теоретическая физика (136). Идеи Я. И. Френкеля (139). Атомная модель движущейся дислокации по Френкелю и Конторовой (141). Взаимодействие дислокаций (144). «Живой» солитонный атом (147). Диалог читателя с автором (148). Дислокации и маятники (152). Во что превратились звуковые волны (156). Как увидеть дислокации? (160). Настольные солитоны (163). Другие близкие родственники дислокаций по математической линии (164). Магнитные солитоны (168).

Глава 7. Второе рождение солитона

172

Может ли человек «дружить» с ЭВМ (174). Воспоминание о хаосе (178). ЭВМ удивляет Энрико Ферми (183). Возвращение солитона Рассела (188). Океанские солитоны: цунами и «девятый вал» (198). Три солитона (202). Нервный импульс — «элементарная частица» мысли (205). Вездесущие вихри (209). Элементарные частицы и солитоны (217).

Александр Тихонович Филиппов

МНОГОЛИКИЙ СОЛИТОН

Серия «Библиотечка «Квант», вып. 48

Редактор *А. Ю. Кирий, В. Я. Дубнова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Т. Г. Егорова*

ИБ № 12791

Сдано в набор 15.07.85. Подписано к печати 30.12.85. Т-24565. Формат $84 \times 108^{1/32}$. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура таймс. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 13,53. Тираж 82 000 экз. Заказ № 22. Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор»
имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136 Ленинград П-136, Чкаловский пр., 15.

40 коп.
